Auxiliar #2.

Martes, 23/Marzo/2021.

Octopus's Garden - The Beatles.

Cinemática $\Leftrightarrow$ cómo se mueven las cosas.

$$\underset{\text{posición}}{\vec{r}(t)} \underset{\int dt}{\overset{\frac{d}{dt}}{\rightleftarrows}} \underset{\text{velocidad}}{\vec{V}(t)} \underset{\int dt}{\overset{\frac{d}{dt}}{\rightleftarrows}} \underset{\text{aceleración}}{\vec{a}(t)}$$

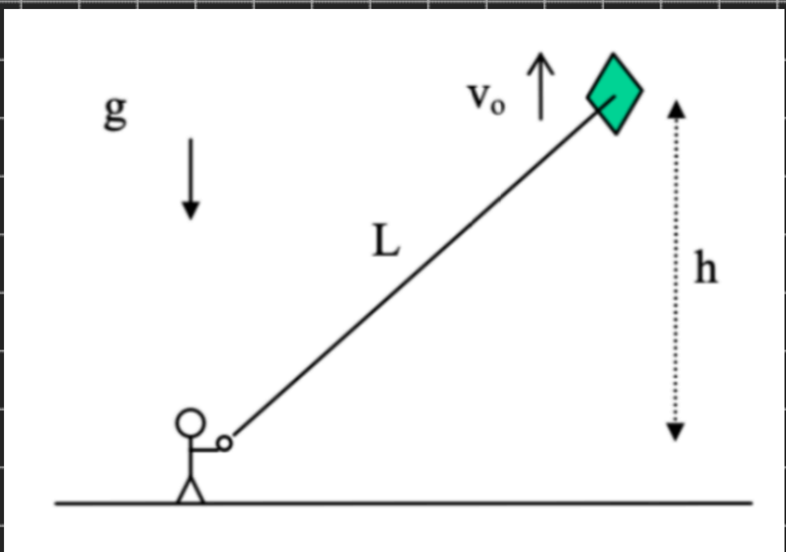
⊗ rapidez $\neq$ velocidad

$\downarrow$

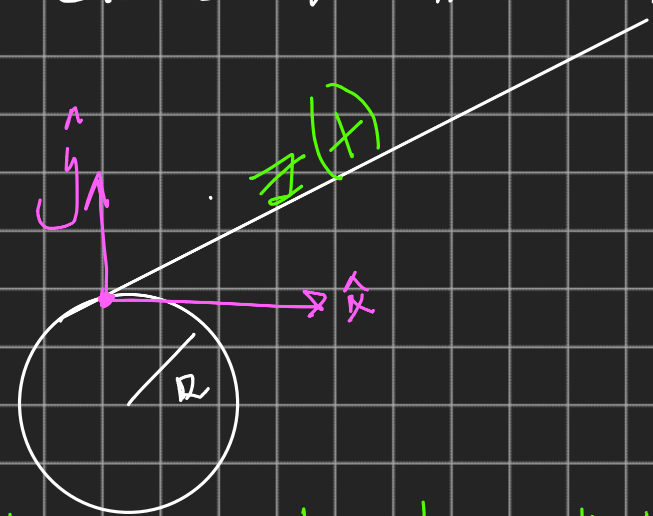
$|\vec{V}|$

P1) Volantín, volantín

Unx niñx está jugando con un volantín, cuyo carrete tiene radio R. Inicialmente, éste se encuentra a una altura h sobre la posición del carrete, y sube verticalmente con una rapidez V_0 constante, como se ve en la figura. Si en dicho instante se han desenrrollado L metros de hilo, determine con qué velocidad angular gira el carrete, en función del tiempo.

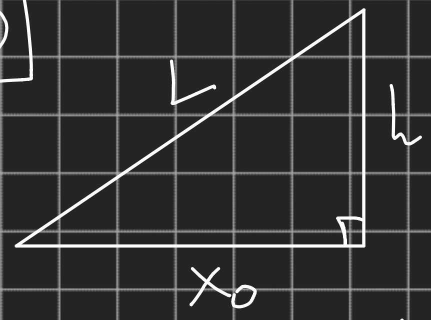


⊗ Sólo se mueve hacia arriba.



$z(t)$: metros del hilo que se ha desenrollado.

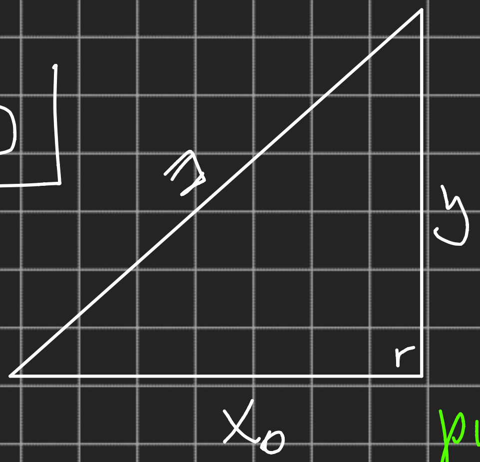
$\boxed{t=0}$



$$x_0=\sqrt{L^2-h^2}$$

$\boxed{t>0}$

$$(*)\quad z^2 = y^2 + x_0^2$$



MRU: $y = h + V_0 t$.

Vamos a buscar $z(t)$ y después usar:

$$\dot z(t) = 2\,w$$

$$z^2 = y^2 + x_0^2 \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

apaña derivar las restricciones geométricas.

$$\cancel{2} z\dot z = \cancel{2} y\dot y + \underbrace{\cancel{2 x_0 \dot x_0}}_{0}$$

Cadena:

$$z^2(t) \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow 2\, z(t)\cdot \dot z(t)$$

$$(A)\quad z\dot z = (h+V_0t)\cdot V_0 .$$

$$(*)\quad x_0=\sqrt{L^2-h^2}$$

$$z^2 = y^2 + x_0^2$$

$$z = \sqrt{(h+V_0t)^2 + x_0^2}$$

$$z = \sqrt{(h+V_0t)^2 + L^2 - h^2}$$

$$z = \sqrt{2hV_0t + V_0^2t^2 + L^2}$$

Reemplazamos z en (A)

$$\Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{(h+V_0 t)\cdot V_0}{\sqrt{2hV_0 t + V_0^2 t^2 + L^2}}$$

$$\dot{z} = R\cdot w \quad \Rightarrow \quad w = \frac{\dot{z}}{R}.$$

llegamos a la velocidad angular //

$$\boxed{w = \frac{(h+V_0 t)\cdot V_0}{R\sqrt{2hV_0 t + V_0^2 t^2 + L^2}}}$$

P2) Trayectoria de una Partícula

La trayectoria que sigue una partícula está dada por el vector posición: $\vec{r}(t) = (a_1 \cdot cos(\omega t), a_2 \cdot sen(\omega t), 0)$.

a) Encuentre la velocidad y aceleración de la partícula.

velocidad:

$$\vec{V}(t) = (-a_1 w\, sen(wt),\ a_2 \cdot w \cdot cos(wt),\ 0)$$

aceleración:

$$\vec{a}(t) = (-a_1 \cdot w^2 \cdot cos(wt),\ -a_2 w^2 sen(wt),\ 0)$$

b) Encuentre la ecuación $f(x, y, z) = 0$ del lugar geométrico que describe el movimiento de la partícula. Además, bosqueje este lugar geométrico, y los 3 vectores, es decir, $\vec{r}(t), \vec{V}(t)$ y $\vec{a}(t)$).

$$cos^2(wt) + sen^2(wt) = 1.$$

Como $\vec{r}(t)$ tiene justo un seno y un coseno, voy a apuntar a

$$\frac{a_1^2}{a_1^2}\cos^2(wt) + \frac{a_2^2}{a_2^2}\operatorname{sen}^2(wt) = 1.$$

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1. \iff \text{ELIPSE!}$$

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - 1 = 0$$

(*) Si z fuera igual a otra cte distinta de 0, se obtendría la misma trayectoria.

c) ¿Qué condiciones deben cumplirse para que la rapidez de la partícula sea constante? Evalúe $\vec{a}(t)$ para este caso y comente.

Sacamos la rapidez: $|\vec{v}| = \sqrt{a_2^2 w^2 \cos^2(wt) + a_1^2 w^2 \operatorname{sen}^2(wt)}$

$$= cte \;/\; \sqrt{\;} \cdot \frac{1}{w^2}.$$

$$a_2^2 \cdot \cos^2(wt) + a_1^2 \cdot \operatorname{sen}^2(wt) = \text{otra cte}.$$

$$\iff \boxed{a_1 = a_2}$$

(*) esto equivale a hacer $|\vec{e}| = 0$.

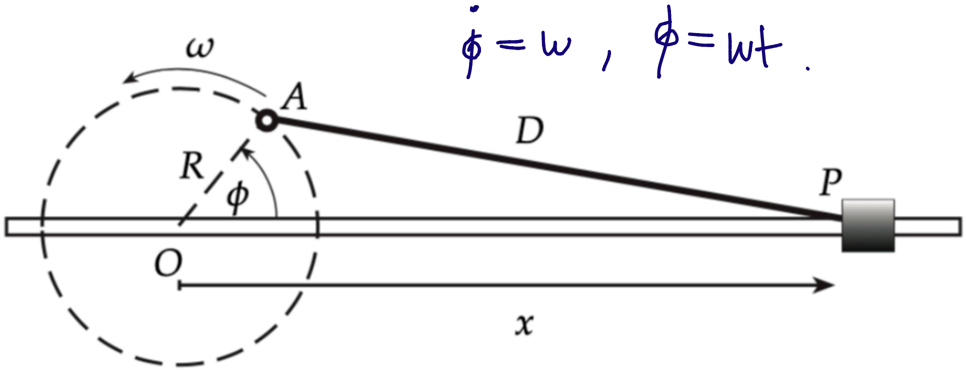
$\Rightarrow$ queda una CIRCUNFERENCIA.

$\vec{a}_{tangencial} = 0$; $\vec{a}_{centrípeta} \neq 0$

P3) Pistón

El punto de unión P entre un pistón y una biela de largo D se mueve a lo largo del eje x debido a que el cigüeñal (disco), de radio R y centro en un punto fijo O, rota a velocidad angular constante ω. En el instante $t = 0$ la biela está horizontal: $\phi = 0, x = R + D$.

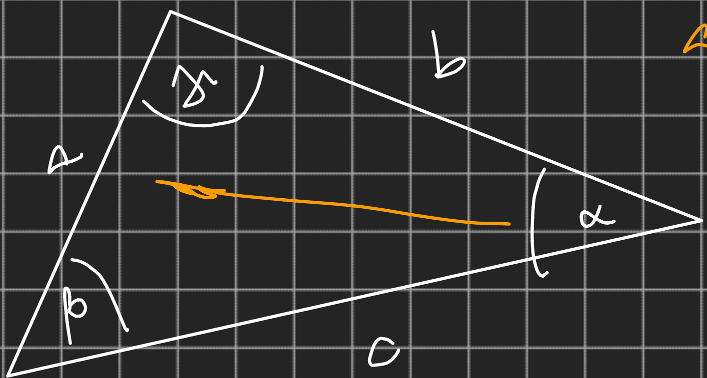
$\dot{\phi} = \omega$, $\phi = \omega t$.



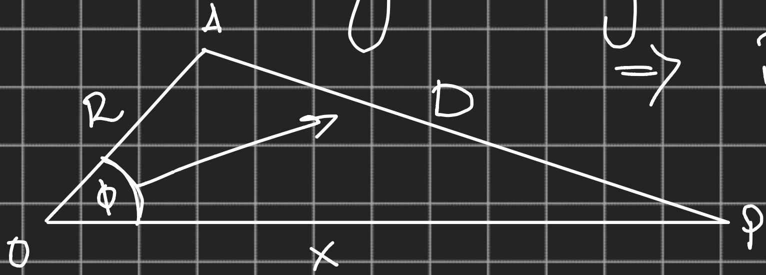
a) Encuentre una expresión para $x(t)$ entre P y O.

Usamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \underline{\underline{\alpha}}$$



Tenemos el sgte. triángulo:



$$\Rightarrow D^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cdot \cos \underline{\underline{\phi}}$$

$$D^2 = R^2 + x^2 - 2Rx \cdot \cos(\omega t)$$

despejamos $x(t)$.

$$x^2 - 2R\cdot\cos(wt)\cdot x + (R^2 - D^2) = 0 \quad \Big\}\ \text{ecuación cuadrática}$$

$$\Rightarrow\ x(t) = \frac{2R\cdot\cos(wt) \pm \sqrt{4R^2\cdot\cos^2(wt) - 4(R^2 - D^2)}}{2}$$

$$x(t) = R\cdot\cos(wt) \pm \sqrt{R^2(\cos^2(wt) - 1) + D^2}$$

$$x(t) = R\cdot\cos(wt) \pm \sqrt{D^2 - R^2\cdot\operatorname{sen}^2(wt)}.$$

¿Cómo decido si usar el + o el −?

en $t = 0$ debe cumplirse: $x(t=0) = R + D$.

$\rightarrow$ evaluando en $t=0$: $x(t=0) = R \pm D$

$\Rightarrow$ hay que usar el +

Queda: $\boxed{x(t) = R\cdot\cos(wt) + \sqrt{D^2 - R^2\cdot\operatorname{sen}^2(wt)}}$

b) Encuentre la velocidad $v(t)$.

Derivamos $x(t)$ con respecto al tiempo.

$$V(t) = \dot{x}(t) = -Rw\cdot\operatorname{sen}(wt) + \frac{(-\cancel{2}R^2\cdot\operatorname{sen}(wt)\cdot\cos(wt)\cdot w)}{\cancel{2}\sqrt{D^2 - R^2\cdot\operatorname{sen}^2(wt)}}$$

$$V(t) = -Rw\,\operatorname{sen}(wt) - \frac{R^2 w\cdot\operatorname{sen}(wt)\cdot\cos(wt)}{\sqrt{D^2 - R^2\cdot\operatorname{sen}^2(wt)}}$$

Llegamos: $\boxed{V(t) = -Rw\operatorname{sen}(wt)\cdot\left(1 + \underbrace{\frac{R\cdot\cos(wt)}{\sqrt{D^2 - R^2\operatorname{sen}^2(wt)}}}_{a}\right)}$

c) En la expresión para $v(t)$, considere el caso $R << D$. Luego encuentre una expresión aproximada para la aceleración de P.

¿Cómo se compara la magnitud de la aceleración máxima del pistón con la aceleración del punto A?

¿Cómo queda lo de adentro de la raíz?

$$R << D \Rightarrow D^2 - R^2 \cdot \operatorname{sen}^2(wt) \approx D^2$$

Con esto, a queda: $\dfrac{R \cdot \cos(wt)}{\sqrt{D^2 - R^2 \operatorname{sen}^2(wt)}} \approx \dfrac{R \cdot \cos(wt)}{D}$

Pero $\dfrac{R}{D} \approx 0 \Rightarrow a \approx 0.$

Entonces, V(t) aproximada queda:

$$\boxed{V_2(t) = -R \cdot w \cdot \operatorname{sen}(wt)}$$

Para la aceleración aproximada, derivamos:

$$a_2(t) = -R \cdot w^2 \cdot \cos(wt)$$

Esta es máxima cuando $\cos(wt) = -1.$

$$a_{2,max}(t) = R \cdot w^2$$