Pauta Auxiliar 1

Profesor: Patricio Aceituno

Auxiliares: Nicolas Guerra, Mauricio Rojas, Edgardo Rosas

18 de marzo de 2021

P1. La idea de este problema es mentalizarnos que Mecánica es un ramo matraquero, lo siento pero es cierto (es por esto tambien que a lo largo del curso veremos trucos para resolver ciertos problemas tipicos) . Por lo que hay que esforzarse en entender lo mejor posible el problema, para despues... darle para adelante. En el caso de esta pregunta, nos dan las aceleraciones de ciertos movimientos y tenemos que llegar a $\vec{r}(t)$. Comencemos:

- En el primer problema tenemos $a = vt$ Puesto que queremos llegar a la posicion en funcion del tiempo, tendremos que integrar la ecuación, pero no podemos hacerlo directamente. Si reescribimos la acelaracion como $\frac{dv}{dt}$:

$$\frac{dv}{dt} = vt$$

Ahora podemos pasar dividiendo el v e integrar a ambos lados con $\int dt$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = t$$
$$\int_{v_o}^{v} \frac{dv}{v} = \int_{0}^{t} t\,dt$$
$$\ln(v) - \ln(v_o) = \frac{t^2}{2}$$

Notamos que asumimos que inicialmente tenia una velocidad inicial y que el tiempo parte desde $t = 0$, normalmente este es el caso, pero depende de cada problema y de la informacion que nos entregue el enunciado. Ahora si calculamos la exponencial en ambos lados y recordando que la resta de logaritmos es el logaritmo del cuociente:

$$\frac{v}{v_o} = e^{\frac{t^2}{2}}$$
$$v(t) = v_o e^{\frac{t^2}{2}}$$

Con lo cual obtuvimos la velocidad en funcion del tiempo, si queremos la posición, podemos reescribir la velocidad como $\frac{dr}{dt}$

$$\frac{dr(t)}{dt} = v_o e^{\frac{t^2}{2}}$$

Integrando:

$$\int_{r_o}^{r} dr = \int_{0}^{t} v_o e^{\frac{t^2}{2}}\, dt$$
$$r(t) = r_o + \int_{0}^{t} v_o e^{\frac{t^2}{2}}\, dt$$

No es necesario resolver esa integral, se deja expresado.

Comentario: Cuando en alguna pregunta pidan dejar expresado con algun tipo de integral o funcion, tengan cuidado de que la integral este bien expresada, es decir, que todas las variables esten expresadas en funcion de la variable de integración. (Si alguien tiene mas dudas respecto a esto, puede consultarme c:) Igualmente lo trabajaremos en el siguiente item.

- Ahora tenemos que $a = -x^2$, para poder llegar a la posicion $x(t)$, necesitamos integrar esa ecuación, pero como? bueno, utilizaremos un truco tan famoso que se suele llamar, el truco de mecánica. Va así,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx}$$

Donde primero utilizamos la definicion de aceleracion, luego usamos un niquitanipone conveniente y reconocemos luego $\frac{dx}{dt}$, como la velocidad. Si ahora volvemos a nuestro problema, podemos escribirlo como:

$$v\,\frac{dv}{dx} = -x^2$$

Ahora si podemos integrar esta ecuación con $\int dx$, obteniendo:

$$\int_{v_o}^{v} v\,dv = -\int_{x_o}^{x} x^2\,dx$$
$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_o^2}{2} = \frac{x_0^3}{3} - \frac{x^3}{3}$$
$$\frac{v^2}{2} = C - \frac{x^3}{3}$$

Ahora podemos calcular raiz y luego escribir $v = \frac{dx}{dt}$ pues el objetivo es llegar a una expresion en funcion del tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2C - \frac{x^3}{3}}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2C - \frac{x^3}{3}}}\frac{dx}{dt} = 1$$

Ahora podemos integrar con $\int dt$ obteniendo así:

$$\int_{x_o}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2C - \frac{x^3}{3}}} = \int_{t_o}^{t} dt$$
$$\int_{x_o}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2C - \frac{x^3}{3}}} = t - t_o$$

Bueno esta integral no se puede resolver analíticamente, pero no es lo importante, la idea es desarrollar intuiciones de que hacer en cada paso hasta llegar a la respuesta. Y luego de ser posible sacar conclusiones.

- Finalmnte, trabajaremos con un movimiento bidimensional donde $a_x = -x$ y $a_y = -y$. Notamos que ambos ejes tienen la misma aceleración por lo que hacerlo para uno, me dara como resultado el otro también: Comencemos:

$$\frac{dv_x}{dt} = -x$$

Nuevamente aplicamos el truco de mecánica:

$$\frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = -x$$
$$v_x\frac{dv_x}{dx} = -x$$

Integramos con $\int dx$

$$\int_{v_o x}^{v} v_x dv_x = -\int_{x_o}^{x} x\,dx$$
$$\frac{v_x^2}{2} - \frac{v_{xo}^2}{2} = \frac{x_o^2}{2} - \frac{x^2}{2}$$
$$v_x = \sqrt{C - x^2}$$

Ahora re escribimos v_x de manera conveniente e integramos:

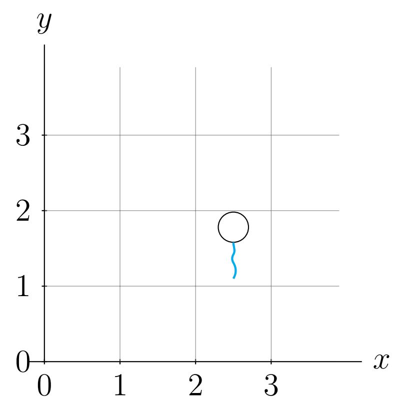
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{C_1 - x^2}$$
$$\frac{1}{\sqrt{C_1 - x^2}}\frac{dx}{dt} = 1$$
$$\int_{x_o}^{x} \frac{dx}{\sqrt{C_1 - x^2}} = \int_{t_o}^{t} dt$$
$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{C_1}} - \arcsin\frac{x_o}{\sqrt{C_1}} = t - t_o$$
$$x(t) = \sqrt{C}\sin(t - t_o + \phi_1)$$

Puesto que para el otro eje el calculo es analogo excepto porque pueden ser distintas condiciones iniciales, tendremos:

$$\vec{r}(t) = \sqrt{C}\sin(t - t_o + \phi_1)\hat{\imath} + \sqrt{C_2}\sin(t - t_o + \phi_2)$$

P2. En esta pregunta nos piden la trayectoria, esto significa encontrar una funcion $y = y(x)$, que nos dará la forma en la que se moverá la particula, (el globo en este caso).

Para obtener $y(x)$ utilizaremos informacion conocida,en este caso, las velocidades del eje x y del eje y.



$v_x = \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = ky \wedge v_y = \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = v_0$

De la primera ecuación "me molesta.el t y en la segunda me falta el x. Si multiplico la primera por dy

$\implies dy\,\dfrac{dx}{dt} = dy\,ky \Leftrightarrow dx\,\dfrac{dy}{dt} = ky\,dy$, (si todavía no te acostumbras a trabajar con los diferenciales asi, puedes hacer un ni-quita-ni-pone con el $\dfrac{dx}{dt}$, de la siguiente forma

$\dfrac{dx}{dy}\dfrac{dy}{dt}$ y luego reemplazas el $\dfrac{dy}{dt}$ por v_0) ahora reemplazamos $\dfrac{dy}{dt}$ por v_0 obteniendo $v_0 \int\limits_{x=0}^{x} dx = \int\limits_{y(x=0)}^{y(x)} y\,dy$, como $y(x=0) = y(0) = 0 \implies v_0 x = k\dfrac{y^2(x)}{2} \implies y(x) = \sqrt{\dfrac{2v_0}{k}x}$, con lo que obtuvimos la trayectoria del globo, una funcion raiz cuadrada :o.

Ahora para calcular el itinerario necesitamos encontar, $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$, que es el itinerario en cartesianas. De la ecuacion para la velocidad en el eje y tenemos: $\dfrac{dy}{dt} = v_0 \implies dy = v_0 dt$, integrando , $\int\limits_{y=0}^{y(t)} dy = v_0 \int\limits_{t=0}^{t} !dt \implies y(t) = v_0 t$

De la ecuacion para la velocidad en $x, \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = ky$, pero me molesta el y, lo bueno es que ya sabemos una expresion en funcion del tiempo para y asi que la reemplazamos, obteniendo $x(t) = kv_0 t \Leftrightarrow \int\limits_{x=0}^{x(t)} dx = kv_0 \int\limits_{0}^{t} t\,dt$

$\implies x(t) = kv_0\dfrac{t^2}{2}$, luego combinando ambos resultados, tendremos el itinerario

$\implies \vec{r}(t) = \dfrac{kv_0}{2}t^2\,\hat{\imath} + v_0 t\,\hat{\jmath}$

Para calcular la componente normal y tangencial de la aceleracion, nos pasaremos a las coordenadas intrinsecas, donde su definicion es mas intuitiva. Recordamos: $a_n = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho} \wedge a_t = \ddot{s}$

$\implies \dot{s} = ||\vec{v}(t)|| = ||\dot{\vec{r}}(t)|| \implies \dot{\vec{r}}(t) = kv_0 t\,\hat{i} + v_0\,\hat{j}$, entonces $\dot{s} = \sqrt{k^2v_0^2t^2 + v_0^2}$, (si consideramos que $v_0^2t^2 = y^2$, podemos escribir $\dot{s} = \sqrt{k^2y^2 + v_0^2}$, ademas

$$\begin{aligned}
\ddot{s} &= \frac{d\dot{s}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}\sqrt{k^2v_0^2t^2 + v_0^2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{k^2v_0^2t^2 + v_0^2}}2k^2v_0^2t \\
&= \frac{k^2v_0y}{\sqrt{k^2y^2 + v_0^2}}
\end{aligned}$$

Con esto solo nos falta el radio de curvatura ρ

Como $\rho = \dfrac{||\vec{v}^3||}{||\vec{a} \wedge \vec{v}||} = \dfrac{(k^2y^2 + v_0^2)^{\frac{3}{2}}}{||kv_0\,\hat{i} \wedge (kv_0t\,\hat{i} + v_0\,\hat{j})||} = \dfrac{(k^2y^2 + v_0^2)^{\frac{3}{2}}}{||kv_0^2\,\hat{k}||} = \dfrac{(k^2y^2 + v_0^2)^{\frac{3}{2}}}{kv_0^2}$, ahora si juntamos nuestros resultados, obtenemos

$a_n = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = \dfrac{kv_0^2}{\sqrt{k^2y^2 + v_0^2}} \wedge a_t = \ddot{s} = \dfrac{k^2v_0y}{\sqrt{k^2y^2 + v_0^2}}$

P3. Si usamos coordenadas intrínsecas, de la definicion de $\vec{a}_t$ y $\vec{a}_n$ podemos obtener informacion puesto que son iguales, entonces $||\vec{a}_t|| = ||\vec{a}_n|| \Leftrightarrow ||\ddot{s}\hat{t}|| = \left|\left|\frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}\right|\right| \Leftrightarrow \ddot{s} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$

Consideremos $\dot{s} = \dot{s}(s)$, de esta forma, usando regla de la cadena (o ni-quita-ni-pone si lo prefiere)

$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\frac{d\dot{s}}{ds}$, luego $\dot{s}\frac{d\dot{s}}{ds} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$, esto por la igualdad obtenida anteriormente, si ahora asumimos $\dot{s} \neq 0$ (lo que tiene sentido porque sino, el problema ya estaría solucionado)

$\implies \frac{d\dot{s}}{ds} = \frac{\dot{s}}{\rho} \Leftrightarrow \frac{d\dot{s}}{\dot{s}} = \frac{1}{\rho}ds$, (si, acabo de multiplicar por los diferenciales, si esta idea te incomoda, (no hay razon, la matemática esta a salvo), puedes integrar la igualdad anterior con $\int ds$, asi se cancela un ds con el otro y obtienes lo mismo que yo integrando la ultima igualdad). Ahora integramos nuestra ec. con diferenciales multiplicados y obtenemos (considerando $\rho = R = cte$:

$\int\limits_{\dot{s}=0}^{\dot{s}(s)} \frac{d\dot{s}}{\dot{s}} ds = \frac{1}{R}\int\limits_0^s ds \Leftrightarrow ln|\dot{s}|\Big|_{\dot{s}(0)}^{\dot{s}(s)} = \frac{1}{R}s$, pero sabemos que $\dot{s}(0) = v(0) = v_0$ y que $\dot{s}(s) = v(s)$, entonces :

$ln\left|\frac{v(s)}{v_0}\right| = \frac{1}{R}s \implies v(s) = v_0 \exp^{\frac{1}{R}s}$

Ahora que tenemos $v(s)$, calcularemos $v(t)$ (la entretencion no acaba :P), para esto consideraremos $\dot{s} = \dot{s}(t)$:

como $\ddot{s} = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \Leftrightarrow \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$, donde usamos que la segunda derivada temporal es la primera derivada, derivada en el tiempo. Si ahora multiplicamos por los diferenciales (hay que acostumbrarse) y acomodamos los terminos obtenemos:

$\frac{d\dot{s}}{\dot{s}^2} = \frac{dt}{R}$; $(\rho = R) \implies \int\limits_{\dot{s}(0)}^{\dot{s}(t)} \frac{d\dot{s}}{\dot{s}^2} = \frac{1}{R}\int\limits_0^t dt$, como $\dot{s}(0) = v(0) = v_0 \wedge \dot{s}(t) = v(t)$, tenemos:

$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v(t)} = \frac{1}{R}t \Leftrightarrow v(t) = \frac{Rv_0}{R - v_o t}$

Finalmente, ¿Cuál es el modulo de la aceleración? (¿$||\vec{a}||$?) Como aparece en el resumen: $||\vec{a}|| = \sqrt{||\vec{a}_n||^2 + ||\vec{a}_t||^2}$, como en este caso la aceleración normal y la tangencial son iguales en modulo, podemos escribirlo como $\sqrt{2}||\vec{a}_t|| = \sqrt{2}||\vec{a}_n||$, como $a_t = \dot{v} = \ddot{s} \wedge a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{s}^2}{R}$

$\implies$

$$
\begin{aligned}
||\vec{a}(t)|| &= \sqrt{2}\,||\vec{a}_n(t)|| = \sqrt{2}\,\frac{v^2(t)}{R} \\
&= \sqrt{2}\,||\vec{a}_t(t)|| = \sqrt{2}\,\dot{v}^2(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
||\vec{a}(s)|| &= \sqrt{2}\,||\vec{a}_n(s)|| = \sqrt{2}\,\frac{\dot{s}^2(t)}{R} \\
&= \sqrt{2}\,||\vec{a}_t(s)|| = \sqrt{2}\,\ddot{s}^2(t)
\end{aligned}
$$

Si reemplazamos los valores obtenidos anteriormente podemos obtener una expresion explícita de $\vec{a}(s)$