

Capítulo 1

Cinemática del sólido

1.1 Introducción

En muchos casos es conveniente o incluso necesario describir un fenómeno físico desde un sistema de referencia acelerado (*no inercial*). Por ejemplo, la tierra es un sistema de referencia acelerado debido a la rotación alrededor de un eje que la atraviesa. Así, en estricto rigor, las mediciones que se realizan en sistemas de referencia solidarios a la tierra están hechas desde sistemas de referencia no inerciales.

En esta sección obtendremos expresiones que permiten relacionar las derivadas temporales de un vector cualquiera, evaluadas en distintos sistemas de referencia. En particular, obtendremos expresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula.

1.2 Sistemas de Referencia Acelerados.

Consideremos un sistema de referencia S_0 con origen en O_0 y cuyos ejes permanecen fijos en el espacio (*sistema de referencia fijo*). Sea $\{\hat{e}_1^0, \hat{e}_2^0, \hat{e}_3^0\}$ un triedro de vectores unitarios mutuamente ortogonales que apuntan en la dirección positiva de los ejes de coordenadas cartesianos del sistema fijo. Llamemos S a un segundo sistema de referencia con el mismo origen O_0 , cuyos ejes apuntan en la dirección de los vectores unitarios $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ que definen un triedro ortonormal.

Consideremos la situación en que el sistema S rota con velocidad

angular $\vec{\omega}$ con respecto a S_0 . Entonces, un vector cualquiera $\vec{A}$ se puede expresar alternativamente en función de sus componentes cartesianas en los sistemas S_0 o S :

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i^0 \hat{e}_i^0 = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \quad (1.1)$$

Calculemos la derivada temporal del vector $\vec{A}$ en el sistema S_0 . Note que desde este sistema los vectores unitarios del sistema S están en movimiento. Entonces,

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{S_0} = \sum_{i=1}^3 \frac{d A_i^0}{dt} \hat{e}_i^0 = \sum_{i=1}^3 \frac{d A_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 A_i \frac{d \hat{e}_i}{dt} \quad (1.2)$$

Para evaluar la derivada $d\hat{e}_i/dt$ utilizaremos un método gráfico. Consideremos un sistema de coordenadas que rota instantáneamente con velocidad angular $\vec{\omega}$ en torno al eje $\hat{z}$. Sea $\vec{r}$ un vector solidario al sistema en movimiento. En el intervalo de tiempo dt , el ángulo de rotación ϕ incrementa en $d\phi = \omega dt$ y un observador en el sistema de referencia fijo ve que la punta del vector de posición $\vec{r}$ describe un arco $d\vec{r}$ en un círculo de radio $r \text{ sen } \theta$, en torno al eje z (Figura 1.1). El vector $d\vec{r}$ es tangente al círculo y su magnitud es

$$d r = r \text{ sen } \theta d \phi \quad (1.3)$$

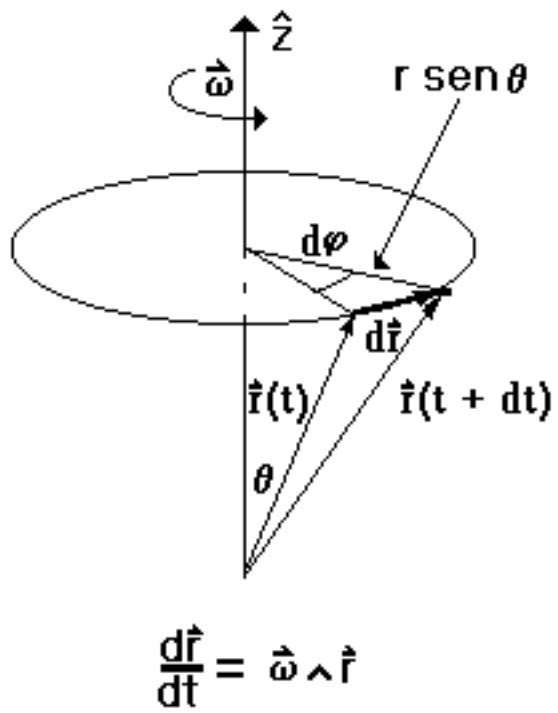
La dirección del vector $d\vec{r}$ es colineal con el vector producto cruz $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$. Entonces,

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= r d\phi \text{ sen } \theta \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{r}}{|\vec{\omega} \wedge \vec{r}|} \\ d\vec{r} &= d\phi \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{r}}{\omega} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dividiendo (1.4) por dt y tendiendo al límite cuando dt tiende a cero, se tiene que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (1.5)$$

donde hemos utilizado que $\omega = d\phi/dt$.



Este mismo tratamiento lo podemos utilizar para calcular la derivada $d \hat{e}_i / d t$. El resultado es

$$\frac{d \hat{e}_i}{d t} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i \quad (1.6)$$

Utilizando (1.6), la ecuación (1.2) se puede reescribir como

$$\left(\frac{d \vec{A}}{d t} \right)_{S_0} = \sum_{i=1}^3 \frac{d A_i}{d t} \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 A_i \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i \equiv \left(\frac{d \vec{A}}{d t} \right)_S + \vec{\omega} \wedge \vec{A} \quad (1.7)$$

El término $(d \vec{A} / d t)_S$ corresponde a la tasa de cambio del vector $\vec{A}$ medida por un observador solidario al sistema S ; mientras que, el último término es consecuencia de la rotación del sistema S con respecto a S_0 .

1.2.1 Rotaciones infinitesimales.

En esta sección se presenta una forma alternativa de calcular la derivada $d \hat{e}_i / d t$ que permite introducir el concepto de rotación infinitesimal desde un punto de vista algebraico.

Consideremos una rotación infinitesimal del sistema de referencia S con respecto a S_0 , donde el vector unitario $\hat{e}_i(t)$ cambia a $\hat{e}_i(t + dt)$. Así, desde el sistema de referencia S_0 se tiene que

$$\hat{e}_i(t + dt) = \hat{e}_i(t) + d \hat{e}_i \quad (1.8)$$

En el sistema de referencia S , las componentes del vector $d \hat{e}_i$ son

$$d \hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 d \Omega_{ij} \hat{e}_j \quad (1.9)$$

donde, los coeficientes $d \Omega_{ij}$ son infinitesimales.

El triedro de vectores $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ son ortonormales: i.e., se cumple que

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} \quad (1.10)$$

Diferenciando (1.10) con $i = j$, se tiene que

$$d \hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 0 \implies d \Omega_{ii} = 0 \quad (1.11)$$

Repitiendo el procedimiento con $i \neq j$ se tiene que

$$d\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j + \hat{e}_i \cdot d\hat{e}_j = 0 \quad (1.12)$$

Reemplazando (1.9) en (1.12) se deduce que

$$d\Omega_{ij} = -d\Omega_{ji} \quad (1.13)$$

Las relaciones (1.11) y (1.13) reducen de nueve a tres los coeficientes $d\Omega_{ij}$ que son independientes. Entonces, resulta útil introducir la siguiente notación:

$$\begin{aligned} d\Omega_{12} &\equiv d\Omega_3 \\ d\Omega_{23} &\equiv d\Omega_1 \\ d\Omega_{31} &\equiv d\Omega_2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Utilizando (1.11), (1.13) y (1.14), se tiene que (1.9) se escribe como:

$$\begin{aligned} d\hat{e}_1 &= d\Omega_{12}\hat{e}_2 + d\Omega_{13}\hat{e}_3 = d\Omega_3\hat{e}_2 - d\Omega_2\hat{e}_3 \\ d\hat{e}_2 &= d\Omega_{21}\hat{e}_1 + d\Omega_{23}\hat{e}_3 = -d\Omega_3\hat{e}_1 + d\Omega_1\hat{e}_3 \\ d\hat{e}_3 &= d\Omega_{31}\hat{e}_1 + d\Omega_{32}\hat{e}_2 = d\Omega_2\hat{e}_1 - d\Omega_1\hat{e}_2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Definamos el vector infinitesimal $d\vec{\Omega}$ como

$$d\vec{\Omega} = d\Omega_1\hat{e}_1 + d\Omega_2\hat{e}_2 + d\Omega_3\hat{e}_3 \quad (1.16)$$

entonces, las relaciones (1.15) se pueden reescribir como:

$$d\hat{e}_i = d\vec{\Omega} \wedge \hat{e}_i \quad (1.17)$$

Definiendo velocidad angular $\vec{\omega}$ como:

$$\vec{\omega} \equiv \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \quad (1.18)$$

de (1.17) se tiene que:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i \quad (1.19)$$

Entonces (1.2) se reescribe como

$$\left(\frac{d \vec{A}}{d t} \right)_{S_0} = \left(\frac{d \vec{A}}{d t} \right)_S + \vec{\omega} \wedge \vec{A} \quad (1.20)$$

Esta es exactamente la relación (1.7) que obtuvimos anteriormente utilizando argumentos geométricos.

NOTA. De esta forma se reconoce que el vector $d \vec{\Omega}$ corresponde a la suma vectorial de rotaciones infinitesimales instantáneas alrededor de cada uno de los ejes de coordenada del sistema móvil (S). El sentido positivo de una rotación queda determinado por la regla de la mano derecha.

Consideremos ahora dos rotaciones infinitesimales sucesivas del sistema de referencia S , primero en $d \vec{\Omega}_1$ alrededor de un eje de rotación $\hat{n}_1$ que pasa por el origen O_0 y luego una segunda rotación $d \vec{\Omega}_2$ alrededor de un segundo eje de rotación $\hat{n}_2$ que también pasa por O_0 . En la primera rotación, un vector $\vec{r}$ solidario al sistema S pasará a ser el vector $\vec{r}_1 = \vec{r} + d \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{r}$. En la segunda rotación $\vec{r}_1$ pasará a ser el vector $\vec{r}_2$,

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + d \vec{\Omega}_2 \wedge \vec{r}_1 \\ &= \vec{r} + d \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{r} + d \vec{\Omega}_2 \wedge (\vec{r} + d \vec{\Omega}_1 \wedge \vec{r}) \\ &\approx \vec{r} + (d \vec{\Omega}_1 + d \vec{\Omega}_2) \wedge \vec{r} + \text{términos de 2º orden} \quad (1.21) \end{aligned}$$

Despreciando las correcciones de segundo orden se concluye que las *rotaciones infinitesimales* se suman vectorialmente y que dicha suma es conmutativa al primer orden. Esta es una propiedad importante de las rotaciones infinitesimales que no se cumple para rotaciones finitas. Estas últimas no conmutan y no pueden ser representadas por vectores.

1.2.2 APLICACIONES.

Aceleración Angular.

Sea $\vec{\omega}$ la velocidad angular con que rota el sistema de referencia S con respecto a S_0 . Entonces, utilizando (1.20), la aceleración angular de S

es,

$$\vec{\alpha}_{S_0} \equiv \left(\frac{d \vec{\omega}}{d t} \right)_{S_0} = \left(\frac{d \vec{\omega}}{d t} \right)_S \equiv \vec{\alpha}_S \quad (1.22)$$

ya que $\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = 0$. Así, se concluye que *aceleración angular* ($\vec{\alpha}$) tiene el mismo valor para un observador en S_0 que para un observador en S .

Vector velocidad de una partícula.

Sea $\vec{r}_k^0$ el vector de posición de una partícula en S_0 . Consideremos la situación en que el sistema de referencia S tiene origen común con S_0 y rota con velocidad angular $\vec{\omega}$ en torno a éste sin que haya translación. Entonces, $\vec{r}_k^0 = \vec{r}_k$. Luego, de acuerdo a (1.20), la velocidad de la partícula medida en S_0 es:

$$\left(\frac{d \vec{r}_k^0}{d t} \right)_{S_0} = \left(\frac{d \vec{r}_k}{d t} \right)_S + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k \quad (1.23)$$

Si ahora aceptamos que los orígenes de ambos sistemas se pueden trasladar, se cumple que (Figura 1.2.2):

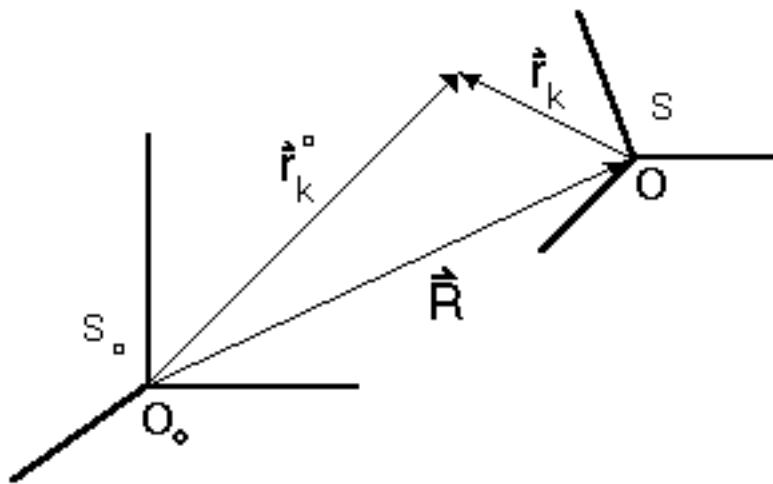
$$\vec{r}_k^0 = \vec{R} + \vec{r}_k \quad (1.24)$$

donde, $\vec{R}$ es el vector de posición del origen O del sistema S con respecto al sistema S_0 . Entonces,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \vec{r}_k^0}{d t} \right)_{S_0} &= \left(\frac{d \vec{R}}{d t} \right)_{S_0} + \left(\frac{d \vec{r}_k^0}{d t} \right)_{S_0} \\ &= \vec{V}_0 + \left(\frac{d \vec{r}_k}{d t} \right)_S + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k \end{aligned} \quad (1.25)$$

donde, $\vec{V}_0$ es la velocidad de translación del origen O con respecto al origen O_0 .

TAREA. Sean j y k dos partículas cuyos vectores de posición en el sistema S son $\vec{r}_j$ y $\vec{r}_k$ respectivamente. El vector de posición del origen del sistema S con respecto al origen del sistema S_0 es $\vec{R}$. El sistema de referencia S se traslada con velocidad $\vec{V}_0$ y rota con velocidad angular $\vec{\omega}$ con respecto a S_0 . Expresa la velocidad relativa de las partículas en



S en función de la velocidad relativa que tienen en S_0 . Recuerde que S no es inercial.

Note que la relación (1.20) puede ser escrita operacionalmente como

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \wedge \quad (1.26)$$

Este procedimiento permite obtener rápidamente las derivadas de orden superior. En efecto:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)_{S_0} \equiv \left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0} \left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0} \quad (1.27)$$

$$= \left(\left(\frac{d}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \wedge\right) \left(\left(\frac{d}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \wedge\right) \quad (1.28)$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)_S \left(\frac{d}{dt}\right)_S + \left(\frac{d}{dt}\right)_S \vec{\omega} \wedge \quad (1.29)$$

$$+ \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \quad (1.30)$$

Note que:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_S \vec{\omega} \wedge = \left(\frac{d \vec{\omega}}{dt}\right)_S \wedge + \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d}{dt}\right)_S \quad (1.31)$$

Reemplazando en (1.30) se tiene que:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)_{S_0} = \left(\frac{d^2}{dt^2}\right)_S + 2 \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge + \vec{\alpha} \wedge \quad (1.32)$$

Aceleración de una partícula.

Calculemos ahora la aceleración de una partícula k en los sistemas de referencia S_0 y S . De la Figura 1.2.2 vemos que $\vec{r}_k^0 = \vec{R} + \vec{r}_k$, entonces:

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}_k^0}{dt^2}\right)_{S_0} = \left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}\right)_{S_0} + \left(\frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2}\right)_{S_0} \quad (1.33)$$

Utilizando (1.32) en el segundo término del lado derecho de (1.33), se tiene que

$$\vec{a}_k^{(0)} = \vec{a}_O + \left(\frac{d^2 \vec{r}_k^{(0)}}{dt^2} \right)_S + 2 \vec{\omega} \wedge \left(\frac{d \vec{r}_k}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_k \quad (1.34)$$

donde, $\vec{a}_O$ es la aceleración del origen del sistema de referencia S con respecto a S_0 , el segundo término corresponde a la aceleración de la partícula en el sistema de referencia S , el tercer término es la *aceleración de Coriolis*, el cuarto término es la aceleración centrípeta y el último término existe si la aceleración angular es distinta de cero (no tiene asociado un nombre específico).

Composición de velocidades angulares.

Consideremos tres sistemas de referencia S_0 , S_1 y S_2 , tales que: S_1 se traslada con velocidad $\vec{v}_{O_1}$ y rota con velocidad angular $\vec{\omega}_1$ con respecto a S_0 ; mientras que, S_2 se traslada con velocidad $\vec{v}_{O_{21}}$ y rota con velocidad angular $\vec{\omega}_{21}$ con respecto a S_1 .

Los vectores de posición de una partícula k en los diferentes sistemas son: $\vec{r}_k^{(0)}$, $\vec{r}_k^{(1)}$ y $\vec{r}_k^{(2)}$. Utilizando (1.25) podemos relacionar la velocidad de la partícula en los sistemas S_0 , S_1 y S_2 como sigue

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_k^{(1)} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{r}_k^{(1)} \quad \text{pero,} \quad (1.35)$$

$$\vec{v}_k^{(1)} = \vec{v}_{O_{21}} + \vec{v}_k^{(2)} + \vec{\omega}_{21} \wedge \vec{r}_k^{(2)} \quad (1.36)$$

Reemplazando (1.36) en (1.35) y utilizando la relación $\vec{r}_k^{(1)} = \vec{r}_k^{(2)} + \vec{R}_{12}$, se tiene que:

$$\vec{v}_k^{(0)} = \underbrace{\vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{O_{21}} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{R}_{12}}_{\vec{v}_{O_2}} + \vec{v}_k^{(2)} + \underbrace{(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{21})}_{\vec{\omega}_2} \wedge \vec{r}_k^{(2)} \quad (1.37)$$

Relacionando directamente la velocidad de k en S_0 y S_2 , se tiene

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{v}_{O_2} + \vec{v}_k^{(2)} + \vec{\omega}_2 \wedge \vec{r}_k^{(2)} \quad (1.38)$$

Comparando (1.37) y (1.38) se concluye que

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{21} \quad (1.39)$$

Composición de Aceleraciones Angulares

Derivando la relación (1.39) con respecto al tiempo se obtiene la aceleración del sistema de referencia S_2 con respecto a S_1

$$\left(\frac{d \vec{\omega}_2}{d t} \right)_{S_0} = \underbrace{\left(\frac{d \vec{\omega}_1}{d t} \right)_{S_0}}_{(\vec{\alpha}_1)_S} + \left(\frac{d \vec{\omega}_{21}}{d t} \right)_{S_0} \quad (1.40)$$

$$\vec{\alpha}_2 = (\vec{\alpha}_1)_S + \left(\frac{d \vec{\omega}_{21}}{d t} \right)_S + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{21} \quad (1.41)$$

$$\vec{\alpha}_2 = (\vec{\alpha}_1)_S + (\vec{\alpha}_{21})_S + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\omega}_{21} \quad (1.42)$$

Note que a diferencia de (1.39), la aceleración angular de S_2 , en general *no es igual* a la suma de las aceleraciones angulares $\vec{\alpha}_1$ y $\vec{\alpha}_{21}$.

1.3 Cinemática de un Sólido Rígido.

Un sólido rígido es un sistema de partículas ideal; tal que, la distancia entre cualquier par de ellas permanece constante en el tiempo; i.e. $|r_l - r_k| = \text{constante}$.

Sea S un sistema de referencia solidario al sólido. En este sistema todas las partículas del sólido permanecen en reposo. Esto se expresa escribiendo:

$$\vec{v}_k = 0 \quad \forall t \quad ; \text{ luego, } \vec{a}_k = 0 \quad \text{para todo } k \quad (1.43)$$

Utilizando las expresiones (1.25) y (1.34) en conjunto con las condiciones (1.43) se obtienen la velocidad y la aceleración de un punto cualquiera del sólido en el sistema de referencia de laboratorio S_0 :

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k \quad (1.44)$$

$$\vec{a}_k^{(0)} = \vec{a}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_k \quad (1.45)$$

donde las cantidades sin superíndice están referidas al sistema S .

Cuando el movimiento del sólido es una translación pura; i.e., cuando $\vec{\omega} = 0$ y $\vec{\alpha} = 0$, entonces:

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{v}_0 \quad \vec{a}_k^{(0)} = \vec{a}_0 \quad (1.46)$$

Cuando el movimiento del sólido es una rotación pura; i.e., cuando $\vec{a}_0 = \vec{v}_0 = 0$, las relaciones (1.44) y (1.45) se reducen a:

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k \quad (1.47)$$

$$\vec{a}_k^{(0)} = \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_k \quad (1.48)$$

1.3.1 Características del movimiento de un sólido rígido.

La velocidad angular con que rota un sistema de referencia solidario a un sólido rígido es independiente de la posición de su origen.

Sean O y O' los orígenes de dos sistemas de referencia solidarios al sólido. Utilizando (1.44) podemos escribir la velocidad de un punto k del sólido en ambos sistemas,

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k \quad (1.49)$$

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{v}_0' + \vec{\omega}' \wedge \vec{r}_k' \quad (1.50)$$

Pero, $\vec{r}_k = \vec{R} + \vec{r}_k'$. Reemplazando este resultado en (1.49) se obtiene que:

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{R} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k' \quad (1.51)$$

Aplicando (1.49) al punto O' se tiene que

$$\vec{v}_{O'} = v_O + \vec{\omega} \wedge \vec{R} \quad (1.52)$$

Utilizando (1.52) en (1.51) se obtiene que

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k' \quad (1.53)$$

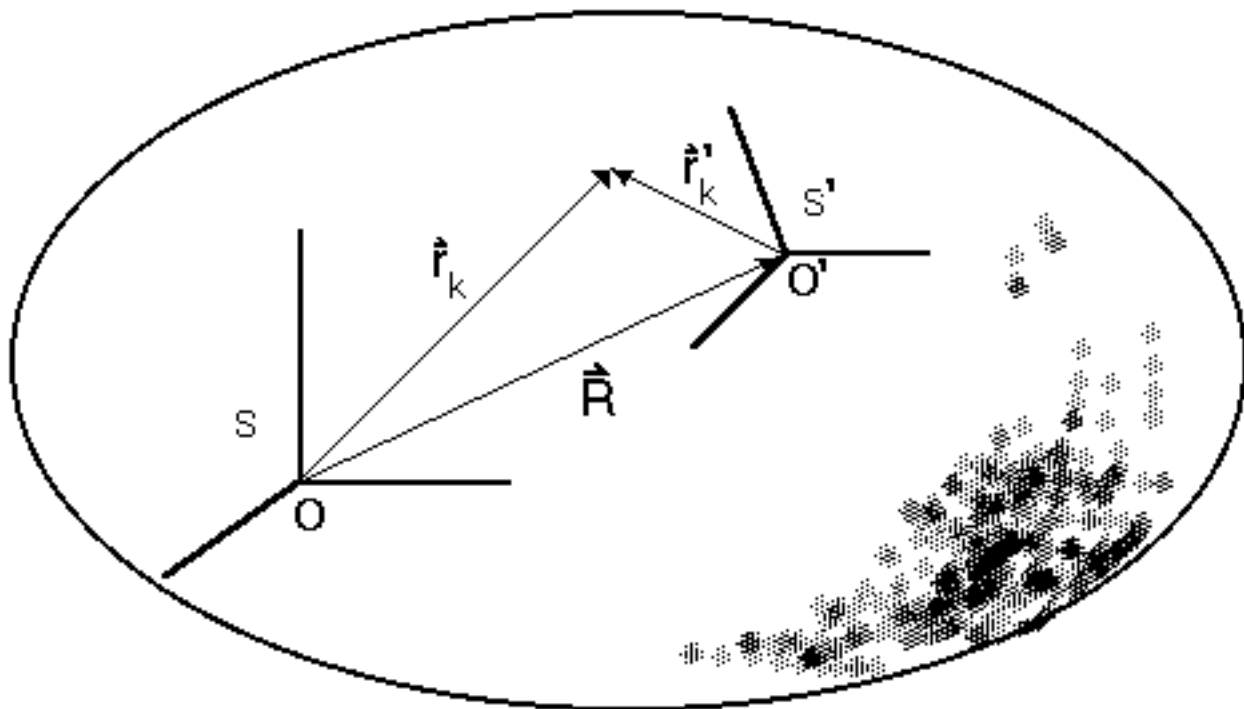
Comparando (1.53) con (1.50), se tiene que

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} \quad (1.54)$$

La componente de la velocidad de los puntos de un sólido rígido en la dirección de la velocidad angular $\vec{\omega}$, es la misma para todos ellos.

Sea k un punto cualquiera del sólido. Al multiplicar escalarmente (1.49) por $\vec{\omega}$ se obtiene que

$$\vec{v}_k \cdot \hat{\omega} = \vec{v}_0 \cdot \hat{\omega} \quad (1.55)$$



**S y S' son dos Sistemas Solidarios
con orígenes en O y O'**

donde $\hat{\omega}$ es un vector unitario paralelo a $\vec{\omega}$. Claramente, $\vec{v}_k \cdot \hat{\omega}$ es independiente de k .

Todos los puntos de un sólido rígido ubicados sobre cualquier recta paralela a $\vec{\omega}$ tienen la misma velocidad.

Sean j y k dos puntos del sólido de una recta paralela a $\vec{\omega}$. De (1.49) se tiene que:

$$\vec{v}_j^{(0)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_j \quad (1.56)$$

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k \quad (1.57)$$

$$(1.58)$$

Restando (1.56) de (1.57) se tiene que

$$\vec{v}_k^{(0)} - \vec{v}_j^{(0)} = \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_k - \vec{r}_j) \quad (1.59)$$

Por hipótesis, el vector $(\vec{r}_k - \vec{r}_j)$ es paralelo a $\vec{\omega}$; entonces, de (1.59) se deduce que:

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{v}_j^{(0)} \quad (1.60)$$

Eje de Mozzi. La ecuación (1.60) sugiere preguntar si existe alguna recta tal que sus puntos tengan vector velocidad *paralelo a $\vec{\omega}$* . Esa recta efectivamente existe y se la conoce por el nombre de *Eje de Mozzi*.

Sea k un punto sobre este eje, entonces $\vec{v}_k = v_k \hat{\omega}$. Reemplazando este valor en (1.49) se tiene:

$$\vec{v}_k^{(0)} \equiv v_k^{(0)} \hat{\omega} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k \quad (1.61)$$

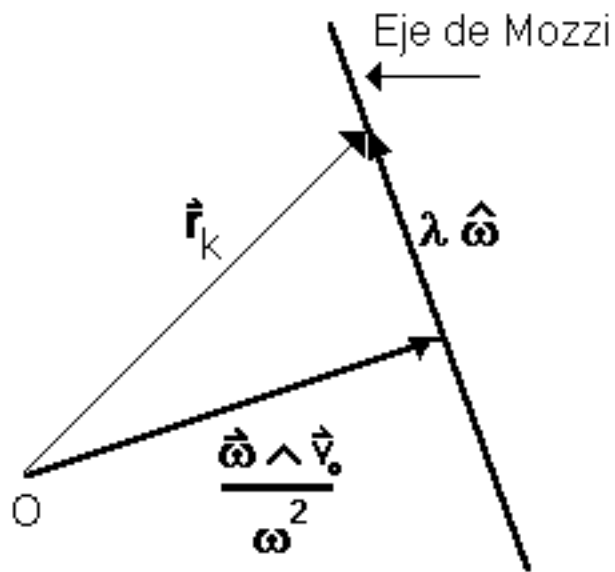
Multiplicando (1.61) vectorialmente desde la izquierda por $\vec{\omega}$:

$$0 = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_k) \quad (1.62)$$

$$0 = \vec{\omega} \wedge \vec{v}_0 + (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_k) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}_k \quad (1.63)$$

De donde se obtiene que

$$\vec{r}_k = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_0}{\omega^2} + (\hat{\omega} \cdot \vec{r}_k) \hat{\omega} \quad (1.64)$$



Note que el primer término al lado derecho de (1.64) es perpendicular a $\vec{\omega}$ y el segundo es paralelo a $\vec{\omega}$. La Figura 1.3.1 muestra un método gráfico para construir el eje de Mozzi. Primero se dibuja el vector $(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_0)/\omega^2$ a partir del origen del sistema de coordenadas solidario al sólido. En el extremo de este vector se copia paralelo a $\vec{\omega}$ un vector de magnitud $\lambda_k \equiv \vec{\omega} \cdot \vec{r}_k$. Cada valor del parámetro $\lambda = \vec{\omega} \cdot \vec{r}$, en el intervalo $(-\infty, +\infty)$ define un punto del eje de Mozzi. Así, la ecuación para ese eje se escribe como:

$$\vec{r} = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_0}{\omega^2} + \lambda \hat{\omega} \quad (1.65)$$

Note que, la velocidad de los puntos sobre el eje de Mozzi es $\vec{v}_0 \cdot \hat{\omega}$. Este valor es nulo en los siguientes casos:

- a) Cuando $\vec{v}_0 = 0$; i.e., cuando el movimiento del sólido es una rotación pura
- b) Cuando $\vec{v}_0$ es perpendicular a $\vec{\omega}$.

Utilizando la ecuación (1.55) vemos que la velocidad instantánea de todos los puntos del sólido es también perpendicular a $\vec{\omega}$.

Una caso particularmente importante ocurre la dirección de los vectores $\vec{v}_0$ y $\vec{\omega}$ se mantienen constantes en el tiempo. Entonces , los puntos del sólido describen trayectorias en planos mutuamente paralelos (movimiento plano). En ese caso, el eje de Mozzi recibe el nombre de *Eje Instantáneo de Rotación*. En este caso, basta con estudiar lo que ocurre en un plano cualquiera para tener una descripción completa del movimiento del sólido. El punto de intersección del eje instantáneo de rotación con el plano seleccionado se denomina *Centro Instantáneo de Rotación*

Cualquier sistema de referencia solidario al sólido y cuyo origen se encuentra sobre el eje instantáneo de rotación, ejecuta instantáneamente una rotación pura en torno a ese eje. Entonces, la velocidad de cualquier punto del sólido se escribe como:

$$\vec{v}_k^{(0)} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_k \quad (1.66)$$

donde el vector de posición $\vec{r}_k$ tiene su origen en el centro instantáneo de rotación.

Un método gráfico para encontrar la posición del eje instantáneo de rotación se muestra en la Figura 1.3.1 y consiste en trazar rectas perpendiculares a los vectores velocidad en dos puntos cualquiera del sólido. El punto de intersección de esas rectas indica la posición del eje instantáneo de rotación (Figura 1.3.1). La curva que describe la trayectoria del centro instantáneo de rotación en el sistema de referencia del laboratorio (S_0) recibe el nombre de *riel*; mientras que, la trayectoria que describe el centro instantáneo de rotación en el sistema solidario, se le conoce con el nombre de *rodante*. Dado que la velocidad del punto de contacto (centro instantáneo de rotación) es única, decimos que la rodante rueda sin resbalar sobre el riel.

EJEMPLO. Una barra rígida de largo L desliza con su extremo superior contacto con una pared vertical (punto B en la Figura 1.3.1); mientras que el extremo inferior lo hace sobre una superficie horizontal (punto A). La magnitud de las velocidades de los puntos A y B son V_A y V_B respectivamente.

- a) Encuentre la posición del centro instantáneo de rotación.
 - b) Calcule la velocidad angular con que rota la barra.
 - c) Encuentre la ecuación del riel y la rodante.
- a) El centro instantáneo de rotación (C.I.R.) se encuentra trazando las perpendiculares a los vectores velocidad en los puntos A y B (Figura 1.3.1). Las coordenadas del (C.I.R.) en el sistema de referencia con origen O_0 y fijo a las paredes son:

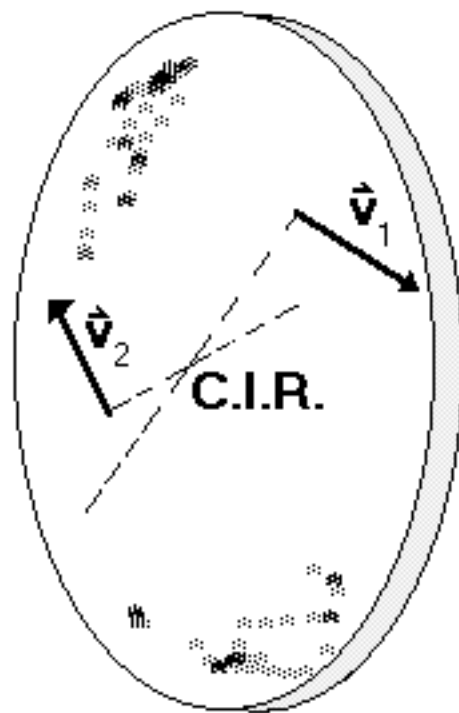
$$X_C = L \cos \theta \quad Y_C = L \operatorname{sen} \theta \quad (1.67)$$

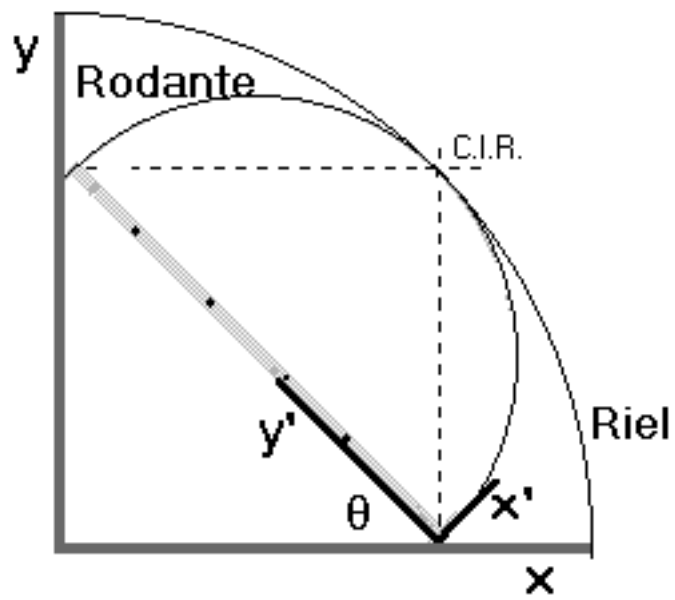
- b) El movimiento instantáneo de la barra es una rotación pura en torno al centro instantáneo de rotación con velocidad angular $\vec{\omega}$; luego:

$$V_B = \omega L \cos \theta \quad V_A = \omega L \operatorname{sen} \theta \quad (1.68)$$

De (1.68) se obtiene que

$$\tan \theta = \frac{V_A}{V_B} \quad (1.69)$$





Utilizando (1.69) y una identidad trigonométrica, se tiene que,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\tan \theta}{(1 + \tan^2 \theta)^{1/2}} = \frac{V_A}{(V_A^2 + V_B^2)^{1/2}} \quad (1.70)$$

De (1.70) y (1.68) se obtiene que

$$\omega = \frac{(V_A^2 + V_B^2)^{1/2}}{L} \quad (1.71)$$

c) La trayectoria que describe el (C.I.R.) en el sistema fijo (riel) se obtiene elevando al cuadrado las coordenadas cartesianas en (1.67):

$$X_C^2 + Y_C^2 = L^2 \quad (1.72)$$

Claramente, el riel es un círculo de radio L centrado en O_0 .

La trayectoria de la rodante se encuentra considerando un sistema de referencia solidario a la barra. Elijamos ese sistema con origen en A y con sus ejes x' e y' perpendicular y paralelo a la barra (Figura 1.3.1). En ese sistema las coordenadas del (C.I.R.) son:

$$x' = L \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \frac{L}{2} \operatorname{sen} 2\theta \quad (1.73)$$

$$y' = L \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{L}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad (1.74)$$

De donde se obtiene que,

$$(x')^2 + \left(y' - \frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad (1.75)$$

La ecuación (1.75) corresponde a un círculo de radio $L/2$, centrado en el punto medio de la barra.

1 Momentum Angular de un Sistema de N partículas.

Consideremos un sistema de N partículas de masas $m_1, m_2, \dots, m_N$ y vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$, con respecto a un sistema de referencia con origen en el punto O .

El momentum angular del sistema de N partículas con respecto a un punto arbitrario Q , de radio vector $\vec{R}_Q$ se escribe como:

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^N m_k (\vec{r}_k - \vec{R}_Q) \wedge (\vec{v}_k - \vec{V}_Q) \quad (1)$$

donde v_k es la velocidad de la partícula de masa m_k en el sistema de referencia S y V_Q es la velocidad del punto Q en ese mismo sistema. Escribiendo separadamente cada término en (1)

$$\vec{L}_Q = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \wedge m_k \vec{v}_k - M \vec{R}_{cm} \wedge \vec{V}_Q - \vec{R}_Q \wedge \vec{P} + M \vec{R}_Q \wedge \vec{V}_Q \quad (2)$$

El primer término al lado derecho corresponde al momentum angular del sistema con respecto al origen O ($\vec{L}_O$), $\vec{R}_{cm}$ es la coordenada de posición del centro de masa y $\vec{P}$ es el momentum lineal total del sistema de partículas. Note que cuando el punto Q es el centro de masa del sistema, el segundo término en (2) se cancela con el último y la expresión se reduce a

$$\vec{L}_{cm} = \vec{L}_O - \vec{R}_{cm} \wedge \vec{P} \quad (3)$$

Calculemos ahora la derivada temporal de la expresión (1):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_Q}{dt} &= \sum_{k=1}^N m_k (\dot{\vec{r}}_k - \dot{\vec{R}}_Q) \wedge (\vec{v}_k - \vec{V}_Q) \\ &+ \sum_{k=1}^N m_k (\vec{r}_k - \vec{R}_Q) \wedge (\dot{\vec{v}}_k - \dot{\vec{V}}_Q) \end{aligned} \quad (4)$$

Donde se ha introducido la notación: $v_k \equiv \dot{\vec{r}}_k$ y $\vec{V}_Q \equiv \dot{\vec{R}}_Q$. Note que, el primer término en (4) es idénticamente nulo. Reescribiendo segundo término, (4) se reduce a:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_{k=1}^N (\vec{r}_k - \vec{R}_Q) \wedge \dot{\vec{p}}_k - \sum_{k=1}^N m_k (\vec{r}_k - \vec{R}_Q) \wedge \dot{\vec{V}}_Q \quad (5)$$

pero, $\dot{\vec{p}}_k = \vec{F}_k$, entonces,

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q - M\vec{R}_{cm} \wedge \dot{\vec{V}}_Q + M\vec{R}_Q \wedge \dot{\vec{V}}_Q \quad (6)$$

donde N_Q es el torque total sobre el sistema de partículas con respecto al punto Q .

Note que:

I) Cuando el punto Q es el centro de masa del sistema, los dos últimos términos en (6) se cancelan mutuamente y la ecuación (6) se reduce a

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{N}_{cm} \quad (7)$$

Esta expresión es válida aún cuando el centro de masa experimente aceleración

II) Si Q es un punto cualquiera cuya aceleración en S es nula, la expresión (6) se reduce a

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q \quad (8)$$

Esta expresión es válida cuando el punto Q no experimenta aceleración. En ese caso es necesario utilizar la expresión (4)

El torque total N_Q en la ecuación (6) se puede descomponer en una contribución proveniente de las fuerzas externas al sistema y otra que se origina en la interacción entre las partículas del sistema (fuerzas internas).

$$N_Q = \sum_{k=1}^N (\vec{r}_k - \vec{R}_Q) \wedge \vec{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^N (\vec{r}_k - \vec{R}_Q) \wedge \vec{F}_k^{(i)} = N_Q^{(e)} + N_Q^{(i)} \quad (9)$$

La contribución de las fuerzas internas al torque total se escribe como

$$N_Q^{(i)} = \sum_{k=1}^N \sum_{l \neq k}^N (\vec{r}_k - \vec{R}_Q) \wedge \vec{f}_{kl} \quad (10)$$

donde la $\vec{f}_{kl}$ es la fuerza que ejerce la partícula l sobre la partícula k . Note que los índices k y l son mudos; consecuentemente, (10) se puede reescribir como

$$N_Q^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l \neq k}^N (\vec{r}_k - \vec{R}_Q) \wedge \vec{f}_{kl} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l \neq k}^N (\vec{r}_l - \vec{R}_Q) \wedge \vec{f}_{lk} \quad (11)$$

La ley de acción y reacción asegura que $\vec{f}_{kl} = -\vec{f}_{lk}$. Reemplazando este resultado en (11), se obtiene que:

$$N_Q^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l \neq k}^N (\vec{r}_k - \vec{r}_l) \wedge \vec{f}_{kl} \quad (12)$$

Esta expresión es nula cuando la ley de acción y reacción se cumple en su versión fuerte, i.e. cuando la fuerza entre dos partículas actúa a lo largo de la línea que las une; entonces, el torque (12) se anula y el torque total se reduce al torque producido por las fuerzas externas. Así, (7) y (8) se escriben como:

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{N}_{cm}^{(e)} \quad (13)$$

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q^{(e)} \quad (14)$$

Teorema de Conservación de Momentum Angular: Cuando el torque externo que actúa sobre un sistema de partículas es nulo, el momentum angular total del sistema, con respecto al CM (o a un punto Q no acelerado) permanece constante.

Conviene llamar la atención sobre la naturaleza vectorial de este teorema de conservación; por ejemplo, la componente L_z del momentum angular total permanecerá constante en el tiempo si la componente $N_z^{(e)}$ del torque total es nula, independientemente del valor que tengan las componentes $N_x^{(e)}$ y $N_y^{(e)}$. Note que para demostrar la ley de conservación del momentum **lineal** de un sistema de partículas en la ausencia de fuerzas externas, sólo se necesita suponer que las fuerzas internas satisfacen la ley de acción y reacción en su forma débil; en tanto que, la ley de conservación de **momentum angular** en ausencia de torques externos, requiere que la ley de acción y reacción se cumpla en su forma fuerte. Fuerzas tales como la fuerza de gravedad y la fuerza de Coulomb, satisfacen este requerimiento; pero existen casos en que esto no es así. En efecto, en sistemas que involucran cargas en movimiento, se generan fuerzas magnéticas que violan el principio de acción y reacción en su versión fuerte. En este caso, la ecuación (14) no es aplicable en la forma allí estipulada. Este problema normalmente se subsana extendiendo el sistema original y redefiniendo el vector momentum angular. Por ejemplo, si se considera el momentum angular de los campos electromagnéticos junto con el momentum angular del sistema de partículas, se obtiene un vector momen-

tum angular que nuevamente satisface la ley de conservación de momentum angular.¹

2 Dinámica de un sólido rígido.

Definición. Un sólido rígido es un cuerpo **ideal** cuyos puntos permanecen a distancias fijas unos de otros en el transcurso del tiempo; i.e. si k y l son dos puntos cualquiera del sólido, entonces

$$|\vec{r}_k - \vec{r}_l| = d_{kl} = \text{Constante} \quad (15)$$

donde, d_{kl} es la distancia entre los puntos k y l .

Las ecuaciones de restricción (15) implican que la posición de **todos** los puntos de un sólido rígido queda completamente determinada especificando 6 coordenadas. En efecto, sea S_0 un sistema de referencia con origen O_0 y A un punto arbitrario del sólido. La posición de A en S_0 queda determinada por sus 3 coordenadas de posición. La posición de un segundo punto B del sólido se encuentra especificando la distancia d_{AB} y los ángulos ϕ_B y θ_B que el vector $\vec{r}_{AB}$ forma con los ejes de coordenada del sistema S_0 . La posición de un tercer punto C está restringida por la condición que las distancias d_{AC} , d_{AB} y d_{BC} están fijas. Los puntos A , B y C definen un plano donde la distancia entre cualquier par de ellos está predeterminada; luego, la posición de C está perfectamente definida dentro del plano. Lo único que resta por determinar para fijar la posición de C en el espacio es el ángulo de rotación β del plano ABC en torno al eje AB .

Así, las tres coordenadas de posición del punto A , más los ángulos ϕ_B , θ_B y β , conforman un conjunto de 6 coordenadas que determinan la posición de todos los puntos de un sólido en el espacio. La posición de cualquier otro punto k del sólido queda determinada por las distancias d_{kA} , d_{kB} y d_{kC} a los puntos A , B y C (tres ecuaciones con tres incógnitas).

2.1 Momentum Angular de un Sólido Rígido.

Consideremos un sistema de referencia S solidario a un sólido rígido que rota con velocidad angular $\vec{\omega}$ con respecto a un sistema de referencia fijo en el laboratorio (S_0). Supongamos que la velocidad relativa entre los orígenes de

¹H. Golstein, *Classical Mechanics*. pág. 7, Segunda Edición, Addison-Wesley (1980).

ambos sistemas es nula (i.e., no hay movimiento de translación); entonces, la velocidad de un punto cualquiera del sólido es $\vec{v}_k = \omega \wedge \vec{r}_k$ y el momentum angular total del sólido se escribe como:

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^N \vec{r}_k \wedge m_k \vec{v}_k = \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_k) \quad (16)$$

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^N (m_k \vec{r}_k^2 \vec{\omega} - m_k \vec{r}_k (\vec{r}_k \cdot \vec{\omega})) \quad (17)$$

$$\vec{L} = \underbrace{\sum_{k=1}^N m_k (\vec{r}_k^2 - \vec{r}_k \vec{r}_k)}_{\text{Tensor de Inercia}} \cdot \vec{\omega} \quad (18)$$

$$\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \quad (19)$$

donde $\mathbf{I}$ se define como el *Tensor de Inercia*. Note que en general, los vectores $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ no son colineales.

Cuando el sólido es una lámina y ubicamos el origen del sistema de coordenadas sobre la lámina, los vectores $\vec{r}_k$ y $\vec{\omega}$ son perpendiculares entre si y la ecuación (17) nos muestra que en este caso los vectores $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ son colineales y el tensor se convierte en una magnitud escalar (*Momento de Inercia*)

$$I = \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k^2 \quad (20)$$

Una situación similar ocurre cuando el eje de rotación coincide con un eje de simetría del sólido. Antes de abordar el estudio del tensor de inercia y la dinámica de un sólido rígido en el caso general, presentaremos algunos ejemplos simples.

2.1.1 Ejemplos.

EJEMPLO 1. Efecto giróscopo

Así se denomina al efecto de precesión, inducido por un torque externo que actúa sobre un sólido rígido que posee momentum angular $\vec{L}$. Para ilustrar el fenómeno estudiemos el efecto del torque gravitacional sobre un aro de bicicleta que gira rápidamente en un plano vertical en torno a su eje de simetría axial, con velocidad angular $\vec{\omega}$ (Figura 2.1.1 a). Al colocar uno de los extremos del eje de rotación sobre un pivote fijo O y dejar libre el

Figura 1: Efecto giroscopio inducido por un torque gravitacional

sistema bajo la acción del torque gravitacional, se observa que el vector $\vec{L}$ describe un círculo con velocidad angular de precesión ω_p . Despreciando la componente del momentum angular generada por el propio movimiento de precesión (muy pequeña cuando la velocidad angular de rotación del sólido en torno a su eje es grande), podemos escribir que el momentum angular total es aproximadamente $\vec{L} = I\vec{\omega}$ y su variación temporal está regida por la ecuación

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{N} = M g D \hat{\phi} \quad (21)$$

En el intervalo de tiempo Δt , el cambio que experimenta el momentum angular es:

$$\Delta \vec{L} = \vec{N} \Delta t \quad (22)$$

pero, dado que el torque gravitacional es constante y perpendicular a la dirección instantánea de $\vec{L}$, necesariamente el vector momentum angular mantiene su magnitud constante mientras describe un círculo en el plano horizontal (Figura 2.1.1 b). En efecto, se puede ver que el arco de circunferencia está relacionado con la variación del ángulo ($\Delta\phi$) a través de la relación geométrica $\Delta L = L \Delta\phi$. Reemplazando este resultado en (22) se obtiene que

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta t} \equiv \omega_p = \frac{|\vec{N}|}{L} = \frac{M g D}{I \omega} \quad (23)$$

TAREA. Calcule la frecuencia de precesión de un aro de masa $M = 1 \text{ Kg}$, y radio $a = 0.3 \text{ m}$ cuyo centro de masa está colocado a una distancia $D = 0.3 \text{ m}$ del pivote O , cuando su velocidad angular de rotación es $\omega = 2\pi \text{ rad/s}$.

Figura 2: Automóvil diseñado para alcanzar una gran aceleración

EJEMPLO 2. Prototipo de un auto de carrera diseñado para alcanzar una gran aceleración (Racer).

Este vehículo está diseñado para alcanzar la máxima velocidad en una pista horizontal recta, de largo fijo (Figura 2.1.1). Supondremos que la tracción se realiza sólo con las ruedas traseras. Entonces, en el momento en que el conductor presiona el pedal del acelerador, las ruedas traseras ejercen una fuerza sobre el asfalto. Por acción y reacción, el asfalto ejerce una fuerza de fricción f sobre el auto, provocando su aceleración. El ideal es impartir la aceleración máxima permitida por el coeficiente de roce estático, durante toda la extensión de la carrera. La Figura (2.1.1) muestra los parámetros geométricos que interesan en este tipo de vehículo; tales como, distancia del CM a los ejes delantero y trasero (b_1 y b_2) y la altura del CM sobre el suelo (h).

La situación ideal se logra colocando el mayor peso posible en la rueda trasera para así aumentar el valor de la normal $\vec{N}_2$. La normal $\vec{N}_1$ disminuye a medida que aumenta la aceleración del auto y en el límite, justo antes de que la rueda delantera pierda contacto con el suelo, se anula. En la práctica, se requiere que $\vec{N}_1$ sea pequeño pero distinto de cero, pues de otra forma el conductor no podría maniobrar el automóvil. i) Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección horizontal

$$Ma_{CM} = f \quad (24)$$

donde f es la fuerza que el asfalto ejerce sobre el auto.

ii) Equilibrio de fuerzas en la dirección vertical

$$N_1 + N_2 - M g = 0 \quad (25)$$

iii) Equilibrio rotacional alrededor de un eje que pasa por el CM. Esta condición evita que el vehículo rote.

$$\sum_j \vec{N}_j = 0 \quad (26)$$

Note que el torque ha sido calculado con respecto al centro de masa, para así poder utilizar la ecuación (7):

$$f h + N_1 b_1 + N_2 b_2 = 0 \quad (27)$$

En el límite cuando $\vec{N}_1$ es muy pequeño la (25) se reduce a:

$$\vec{N}_2 = M g \quad (28)$$

El valor máximo de la fuerza de fricción estática f es

$$f = \mu_s N_2 = \mu_s M g \quad (29)$$

Reemplazando este valor en (24) se obtiene que

$$a_{CM} = \mu_s g \quad (30)$$

Dado que μ_s es del orden de magnitud de la unidad, se concluye que el valor máximo de a_{CM} es cercano a $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Reemplazando (28) y (29) en (27), se obtiene la relación que deben satisfacer las distancias h y b_2 para que (30) se cumpla,

$$\frac{b_2}{h} = \mu_s \quad (31)$$

EJEMPLO 3. Péndulo Físico y Punto de Percusión.

Un péndulo físico es un sistema formado por un sólido rígido constreñido a rotar en torno a un eje fijo que pasa a través de él (O). Llamemos $\hat{e}_3$ al vector unitario que apunta en la dirección del eje de rotación y que supondremos perpendicular al plano de la Figura (3). Sean $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ dos vectores unitarios en el plano de la figura y solidarios al sólido. El primero apunta a lo largo de la línea que une el punto O con el CM del sólido ; mientras que el segundo

Figura 3: Péndulo Físico

es perpendicular a esa línea. El sentido de los vectores unitarios se elige de manera que se cumple que

$$\hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \quad (32)$$

Llamemos θ al ángulo que forma el vector $\hat{e}_1$ con la vertical. El torque gravitacional produce un cambio en el momentum angular del sólido. Aplicando la ecuación (14) en el punto O , se tiene que la variación temporal de la componente L_3 del momentum angular es:

$$\begin{aligned} \frac{dL_3}{dt} &= -M g R \sin\theta \\ I \frac{d\omega}{dt} &\approx -M g R \theta \end{aligned} \quad (33)$$

$$(34)$$

donde M es la masa del péndulo, R la distancia desde el eje de rotación O al CM e I el momento de inercia con respecto al eje que pasa por O .

La ecuación (34) es la de un oscilador armónico simple de frecuencia angular Ω , tal que

$$\Omega^2 = \frac{M g R}{I} \quad (35)$$

donde $I = I_{CM} + M R^2$ (Teorema de Steiner).

Radio de giro. Se definen los radios de giro k y $\bar{k}$ a través de las relaciones

$$\begin{aligned} I_O &= I_{CM} + M R^2 \equiv M k^2 \\ I_{CM} &\equiv M \bar{k}^2 \end{aligned} \quad (36)$$

En función de estos radios de giro podemos reescribir la frecuencia Ω como sigue:

$$\Omega^2 = \frac{M g R}{M(k^2 + R^2)} \equiv \frac{g}{l_1} \quad (37)$$

donde, l_1 es la longitud de un péndulo simple equivalente de igual frecuencia. Note que $l_1 > R$.

TAREA.

Demuestre que si el eje de rotación se desplaza a lo largo de la línea $O - CM$ una distancia l_1 – hasta el centro de percusión– el nuevo péndulo oscila exactamente con la misma frecuencia Ω que el péndulo original. Diseñe un procedimiento experimental que le permita medir g utilizando este resultado. Este tipo de péndulo, llamado péndulo de Kater se utilizó frecuentemente durante el siglo XIX para determinar variaciones locales de la aceleración de gravedad g .

Centro de Percusión

Estudiemos la respuesta de un péndulo físico a una fuerza transversal impulsiva f . Por definición, una fuerza impulsiva es una fuerza que crece rápidamente desde cero hasta un valor muy grande y luego decae rápidamente a cero nuevamente. Durante el intervalo de tiempo Δt en que la fuerza es distinta de cero domina la dinámica del problema y la fuerza de gravedad (finita) se considera despreciable en comparación con ella. En general, la aplicación de la fuerza f genera una fuerza de reacción percusiva en el eje de rotación O . En la discusión que sigue sólo estaremos interesados en la componente de la fuerza de reacción en la dirección $\hat{e}_2$ ($-f_r$). (En la dirección $\hat{e}_1$ existe una fuerza que es responsable de mantener el CM en movimiento circular pero en este momento no estamos interesados en ella). En la dirección $\hat{e}_2$ podemos escribir que:

$$M \frac{dv_\theta}{dt} = M R \ddot{\theta} = f - f_r \quad (38)$$

donde, v_θ es la componente de la velocidad del centro de masa del péndulo en la dirección del vector unitario $\hat{e}_2$. También, la variación temporal del momentum angular del péndulo es

$$\frac{I d\dot{\theta}}{dt} = I \ddot{\theta} = N_3 = f l \quad (39)$$

donde l es la distancia del punto de aplicación de la fuerza de percusión al

Figura 4: (a) Boomerang clásico (b) Boomerang en forma de cruz

eje de rotación O . Combinando (38) y (39) se tiene que

$$\frac{f_r}{f} = 1 - \frac{M R l}{I} = \frac{l_1 - l}{l_1} \quad (40)$$

donde, l_1 es la longitud equivalente definida en (37). Claramente, si la distancia l es igual a l_1 (punto de percusión), la fuerza de reacción f_r es nula. Este resultado se aplica en el diseño de herramientas de trabajo o implementos deportivos (hachas, raquetas de tenis,... etc.) para evitar las lesiones producidas en los brazos del usuario como resultado de la fuerza de reacción generada durante el impacto.

EJEMPLO 4. El Boomerang.

Este dispositivo, tradicional en las tribus nativas de Australia, ha maravillado por años a grandes y chicos con la magia de la trayectoria que describe al ser lanzado por un experto. Estudios arqueológicos y antropológicos sugieren que el boomerang fue utilizado como objeto de esparcimiento y también como arma de caza. Los primeros, una vez lanzados apropiadamente, vuelven al lugar de donde partieron; en tanto que, aquellos utilizados para la caza son mucho más pesados y no tienen esa capacidad.

La forma de los boomerang encontrados en Australia es diversa y parece ser que la típica forma angulada Figura 2.1.1 (a) no es esencial para sus propiedades. En efecto, se han encontrado boomerangs en forma de cruz tal como se ilustra en la Figura 2.1.1 (b). Lo esencial en un buen boomerang de esparcimiento es la aerodinámica de su hojas, ya que ello produce una

Figura 5: La presión es menor en la parte inferior del ala de un avión mientras se desplaza en el aire

diferencia de presión entre ambas caras del dispositivo mientras rota y surca el aire durante el vuelo. Este efecto es el mismo que explica la sustentación del ala de un avión (Figura 5). En el caso de un boomerang, la fuerza aerodinámica genera además un torque con respecto a su centro de masa, que es responsable de la rotación del plano en que instantáneamente gira el dispositivo.

Para simplificar los cálculos, analizaremos la dinámica de un boomerang simétrico en forma de cruz. Sea M la masa del dispositivo y l el largo de cada aspa. Entonces, la densidad de masa por unidad de longitud resulta ser

$$\lambda = \frac{M}{4l} \quad (41)$$

El momento de inercia del boomerang con respecto a su centro de masa es:

$$I = 4 \frac{1}{12} M l^2 = \frac{1}{3} M l^2 \quad (42)$$

Fuerza Aerodinámica.

Sea S_O una sistema de referencia fijo en la tierra y S un sistema solidario al boomerang, con origen en su centro de masa. Claramente, la velocidad de translación de S con respecto a S_O es la velocidad $\vec{V}$ del centro de masa. Elijamos los ejes de coordenada z e y del sistema solidario a lo largo de las aspás del boomerang; entonces, la velocidad en S_O del elemento de masa dm ubicado a una distancia r del centro de masa es $\vec{v}(r)$ (Figura 2.1.1)

$$\vec{v}(r) = \vec{V} + \omega \hat{x} \wedge \vec{r} \quad (43)$$

donde ω es la velocidad angular con que rota el boomerang en torno a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular al plano de las aspás. La

Figura 6: Componentes de la velocidad de una sección de un aspa del boomerang

Figura 7: Fuerza aerodinámica y torque sobre un elemento de aspa

fuerza aerodinámica $d\vec{F}$ que actúa en la posición del elemento de masa dm depende de la componente de $\vec{v}(r)$ contenida en el plano yz y perpendicular al aspa en estudio (Figura 2.1.1). Llamemos v_t a esa componente. La fuerza aerodinámica puede ser expresada aproximadamente suponiendo una dependencia cuadrática en v_t :

$$d\vec{F} = C v_t^2 dr \hat{x} \quad (44)$$

donde C es una constante que depende de la aerodinámica de las aspas. Las fuerzas aerodinámicas que actúan en las posiciones: $\vec{r}_1 = y\hat{y}$, $\vec{r}_2 = -y\hat{y}$, $\vec{r}_3 = z\hat{z}$ y $\vec{r}_4 = -z\hat{z}$ son:

$$d\vec{F}_1 = C[\vec{v}(r_1) \cdot \hat{z}]^2 dr \hat{x} = C(V_z^2 + \omega^2 r^2 + 2 V_z \omega r) dr \hat{x}$$

$$\begin{aligned}
d\vec{F}_2 &= C[\vec{v}(r_2) \cdot \hat{z}]^2 dr \hat{x} = C(V_z^2 + \omega^2 r^2 - 2 V_z \omega r) dr \hat{x} \\
d\vec{F}_3 &= C[\vec{v}(r_3) \cdot \hat{y}]^2 dr \hat{x} = C(V_y^2 + \omega^2 r^2 + 2 V_y \omega r) dr \hat{x} \\
d\vec{F}_4 &= C[\vec{v}(r_4) \cdot \hat{y}]^2 dr \hat{x} = C(V_y^2 + \omega^2 r^2 - 2 V_y \omega r) dr \hat{x}
\end{aligned} \tag{45}$$

La fuerza resultante $d\vec{F}$ de estas cuatro contribuciones (Figura 2.1.1) es:

$$d\vec{F} = 4 C \left[\frac{V^2}{2} + \omega^2 r^2 \right] dr \hat{x} \tag{46}$$

Integrando esta expresión entre los límites $r = 0$ y $r = l$, se obtiene la fuerza aerodinámica neta, boomerang:

$$\vec{F} = 4 C l \left[\frac{\omega^2 l^2}{3} + \frac{V^2}{2} \right] \hat{x} \tag{47}$$

Torque aerodinámico. La contribución al torque total, con respecto al CM, de las fuerzas $d\vec{F}_1$, $d\vec{F}_2$, $d\vec{F}_3$ y $d\vec{F}_4$ es

$$d\vec{N} = \vec{r}_1 \wedge d\vec{F}_1 + \vec{r}_2 \wedge d\vec{F}_2 + \vec{r}_3 \wedge d\vec{F}_3 + \vec{r}_4 \wedge d\vec{F}_4 \tag{48}$$

El torque resultante de esta suma es

$$d\vec{N} = dN_y + dN_z = -4 C \omega r^2 dr \vec{V} \tag{49}$$

Integrando sobre la variable r , se tiene que el torque neto es

$$\vec{N} = -\frac{4}{3} C \omega l^3 \vec{V} \tag{50}$$

Dado que el torque aerodinámico es permanentemente perpendicular al momentum angular del boomerang, se produce una precesión del dispositivo debido al efecto giroscopio. La velocidad angular de precesión es

$$\omega_p = \frac{N}{L} = \frac{4 C V \omega l^3}{3 \omega M / 3 l^2} = \frac{C V}{\lambda} \tag{51}$$

donde λ es la densidad lineal de masa de cada aspa y C una constante que depende de la aerodinámica del boomerang.

En base a estos resultados, analicemos la posibilidad de que el boomerang describa una trayectoria circular de radio R (en realidad una hélice, si consideramos el efecto de la gravedad en la dirección vertical) (Figura 2.1.1).

Figura 8: Trayectoria circular de un boomerang

Para ello se requiere que permanentemente la fuerza sobre el centro de masa actúe hacia el centro del círculo. Esto se logra si la velocidad angular con que el CM describe el círculo (Ω), es igual a la frecuencia angular de precesión ω_p

$$\Omega = \frac{V}{R} = \omega_p \quad (52)$$

Reemplazando el valor de ω_p en (51), se obtiene que

$$R = \frac{\lambda}{C} \quad (53)$$

Por otra parte, de la segunda ley de Newton se tiene que, la fuerza aerodinámica debe ser igual a la masa del boomerang por la aceleración centrípeta

$$F_{aerodinamica} = 4 C l \left[\frac{\omega^2 l^2}{3} + \frac{V^2}{2} \right] = M \frac{V^2}{R} \quad (54)$$

De (52) y (54) resulta que la velocidad del centro de masa del boomerang es

$$V = \sqrt{\frac{2}{3}} \omega l \quad (55)$$

Note que el radio del círculo, en la ecuación (53), sólo depende de las características del boomerang y no de las condiciones en que fue lanzado. Indudablemente que es necesario lanzarlo con una velocidad inicial mínima para que alcance a completar una vuelta antes de tocar el suelo y para que la fuerza aerodinámica alcance un valor que le permita describir un círculo. Un

boomerang de esparcimiento que se desea utilizar en espacios abiertos debería estar diseñado para que, al ser lanzado por una persona normal, pueda describir un círculo cuyo radio sea del orden de 25 m . Supongamos que este boomerang es lanzado con velocidad $V = 25\text{ m/s}$ y con velocidad angular $\omega = 100\text{ radianes/s}$. De acuerdo con la teoría que acabamos de exponer, el dispositivo debería permanecer en el aire un tiempo T igual a

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi R}{V} = 2\pi\text{ s} \approx 6\text{ s} \quad (56)$$

1 Movimiento de un sólido rígido

Las ecuaciones que rigen el movimiento de un sólido rígido son:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^e \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{N}_i^e \quad (2)$$

donde, $\vec{P} = M \vec{V}$ es el momentum lineal total, M la masa de cuerpo y $\vec{V}$ la velocidad del centro de masa. $\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}$ es el momentum angular debido a la rotación del sólido, $\mathbf{I}$ es el tensor de inercia y $\vec{\omega}$ la velocidad angular con que rota el sólido.

Cuando el sólido es forzado a rotar en torno a un punto fijo O , los torques en (2) se calculan con respecto a ese mismo punto; sin embargo, si el sólido tiene movimiento de translación y rotación, la ecuación (2) es válida sólo si los torques son calculados con respecto al centro de masa.

1.0.1 Ecuaciones de Euler.

La descripción del movimiento de un sólido rígido en el sistema de referencia de laboratorio (sistema fijo) tiene el inconveniente que las componentes del tensor de inercia son funciones del tiempo. Esta dificultad se puede soslayar si la descripción se realiza desde un sistema de referencia solidario al sólido, con origen en el centro de masa o en un punto del sólido que permanezca en reposo durante el movimiento.

De acuerdo con (2), la ecuación (2) puede ser escrita como

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \wedge \vec{L} = \vec{N} \quad (3)$$

Pero, en el sistema de referencia solidario al sólido (S), las componentes del tensor de inercia son constantes; luego (3) se escribe como:

$$\mathbf{I} \cdot \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \wedge \vec{L} = \vec{N} \quad (4)$$

Si además elegimos el sistema de coordenadas S coincidente con el sistema de los ejes principales, la matriz del tensor $\mathbf{I}$ adopta su forma diagonal y las tres componentes de la ecuación (4) se escriben como:

$$I_{11} \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 I_{33} - \omega_3 \omega_2 I_{22} = N_1 \quad (5)$$

$$I_{22} \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 I_{11} - \omega_1 \omega_3 I_{33} = N_2 \quad (6)$$

$$I_{33} \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 I_{22} - \omega_2 \omega_1 I_{11} = N_3 \quad (7)$$

Estas ecuaciones son conocidas con el nombre de *ecuaciones de Euler*.

1.0.2 Rotación de un trompo simétrico en ausencia de torques externos.

Llamamos trompo simétrico a un sólido que tiene dos de sus momentos de inercia principales iguales. Sean estos, $I_{11} \equiv I_1 = I_{22} \equiv I_2$, donde, los subíndices $\{1, 2, 3\}$ se refieren a las coordenadas $\{x, y, z\}$; así :

$$I_{11} = I_{22} = I_1 \quad I_{33} = I_3 \quad (8)$$

Entonces, la ecuación (7) se reduce a :

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} = 0 \quad \implies \quad \omega_3 = \omega_3^0 = \text{constante} \quad (9)$$

Utilizando este resultado, las ecuaciones (5) y (6) se escriben como:

$$\dot{\omega}_1 + \beta \omega_2 \omega_3^0 = 0 \quad (10)$$

$$\dot{\omega}_2 - \beta \omega_1 \omega_3^0 = 0 \quad (11)$$

donde,

$$\beta = \frac{I_3 - I_2}{I_1} \quad (12)$$

Multiplicando (11) por $i = \sqrt{-1}$ y sumando la ecuación resultante a (10) se obtiene una ecuación para la variable compleja $\omega_1 + i \omega_2$

$$(\dot{\omega}_1 + i \dot{\omega}_2) - i \beta \omega_3^0 (\omega_1 + i \omega_2) = 0 \quad (13)$$

La solución de (13) es:

$$\omega_1 + i \omega_2 = A \exp(i \beta \omega_3^0 t) \quad (14)$$

Figura 1: El vector $\vec{\omega}$ con que rota un trompo simétrico en ausencia de torques, precesa con velocidad angular $\beta \omega_3^0$ en torno a su eje de simetría $\hat{e}_3$

donde, $A = |A| \exp i \theta$ es una constante compleja cuyo valor queda determinado por las condiciones iniciales del problema.

La parte real y la parte imaginaria de (14) corresponden a las componentes 1 y 2 de la velocidad angular del sólido.

$$\omega_1 = |A| \cos(\beta \omega_3^0 t + \theta) \quad (15)$$

$$\omega_2 = |A| \sin(\beta \omega_3^0 t + \theta) \quad (16)$$

Esta solución muestra que el vector $\vec{\omega}$ *precesa* alrededor del vector unitario $\hat{e}_3$ con velocidad angular $\beta \omega_3$ en un círculo de radio $|A|$ (Figura 1.0.2).

Por ejemplo, estas ecuaciones describen al movimiento de una pelota de rugby en el sistema solidario cuando es lanzada al aire con cierta velocidad angular inicial, con respecto a la tierra. El torque gravitacional es nulo y la simetría de la pelota asegura que dos de sus momentos de inercia principales son iguales.

EJEMPLO. Precesión del eje de rotación de la tierra en torno a su eje de simetría.

La tierra es un cuerpo esencialmente esférico; luego, los torques gravitacionales que ejerce el Sol o la Luna son muy pequeños. Así, en una muy buena aproximación, el movimiento de la tierra queda descrito por las ecuaciones de Euler en ausencia de torque externo. Además, la tierra es un cuerpo que presenta esencialmente simetría axial; i.e. tiene dos de sus momentos principales iguales. En estas condiciones, las ecuaciones (9), (15) y (16) son aplicables.

Figura 2: Precesión del vector velocidad angular de la tierra en torno al eje que pasa por los polos.

En particular, el período de precesión del eje de rotación de la tierra en torno al eje de simetría es:

$$T = \frac{2 \pi}{\beta \omega_3^0} = \frac{2 \pi}{\omega_3^0} \frac{I_1}{I_3 - I_1} \quad (17)$$

Considerando la tierra como un esferoide de densidad uniforme y utilizando valores aproximados para sus semiejes mayor y menor, se tiene que:

$$\frac{I_1}{I_3 - I_1} \approx 300 \quad (18)$$

Experimentalmente se observa que el ángulo que forma el eje de rotación (dirección de $\vec{\omega}$) con el eje de simetría de la tierra es muy pequeño y varía constantemente en respuesta a actividad al interior de ella, resultando ser en promedio del orden de 6×10^{-7} radianes; i.e. el arco que separa al vector $\vec{\omega}$ del eje de simetría que pasa por los polos es del orden de 4 metros medido sobre la superficie de la tierra. Esto significa que:

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{(\omega_3^0)^2 + w_\perp^2} \approx \omega_3^0 \quad (19)$$

Entonces,

$$\frac{2 \pi}{\omega_3^0} \approx \frac{2 \pi}{\omega} = 24 \text{ horas} \quad (20)$$

Reemplazando (18) y (20) en (17) se obtiene que el período de *precesión* de $\vec{\omega}$ en torno al eje de simetría de la tierra es

$$T \approx 300 \text{ días} \quad (21)$$

Experimentalmente se encuentra que el período de precesión o *Período de Chandler* es del orden de 440 días. La discrepancia entre este valor y la predicción teórica (21) se atribuye a la elasticidad de la tierra, la existencia de flúidos en su interior y a variaciones metereológicas anuales.

1.0.3 Estabilidad de la rotación de un sólido rígido asimétrico en ausencia de torques externos.

La solución de las ecuaciones de Euler para un sólido que tiene todos los momentos principales distintos es difícil. No obstante, es posible encontrar soluciones aproximadas en varios casos de interés. En particular, en esta sección analizaremos el movimiento cuando inicialmente la dirección del eje de rotación es muy próxima a la dirección de uno de los ejes principales del sólido. Los resultados nos mostrarán que en algunos casos el movimiento del sólido es estable y en otros casos inestable.

Supongamos que $\vec{\omega}$ forma un ángulo muy pequeño con el eje principal que apunta en la dirección $\hat{e}_3$. Eso significa que $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$. Entonces, las ecuaciones de Euler (5, 6 y 7 adoptan la siguiente forma (luego de despreciar términos de segundo orden; i.e., proporcionales a $\omega_1 \omega_2$).

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_3 \omega_2 = 0 \quad (22)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3 \omega_1 = 0 \quad (23)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 0 \quad (24)$$

De (24) se concluye que

$$\omega_3 = \text{constante} \quad (25)$$

Con el propósito de tener presente la pequeñez de las componentes ω_1 y ω_2 , ocuparemos la siguiente notación:

$$\eta_1 \equiv \omega_1 \quad \eta_2 \equiv \omega_2 \quad (26)$$

Derivando (22) con respecto al tiempo y utilizando el valor de $\dot{\eta}_2$ despejado de (23), se obtiene una ecuación diferencial para η_1 :

$$\ddot{\eta}_1 + \beta^2 \omega_3^2 \eta_1 = 0 \quad (27)$$

donde,

$$\beta^2 = \frac{(I_3 - I_1)(I_3 - I_2)}{I_1 I_2} \quad (28)$$

Una ecuación similar a (27) se obtiene para η_2 . Supongamos que I_3 es el mayor de todos los momentos principales del sólido e I_2 el valor del momento de valor intermedio; entonces:

$$I_3 > I_2 > I_1 \quad (29)$$

En ese caso β^2 es positivo y la solución de la ecuación diferencial (27) se escribe como:

$$\eta_1 = A \sqrt{I_2 (I_3 - I_2)} \cos (\beta \omega_3 t + \theta) \quad (30)$$

Análogamente, se tiene que

$$\eta_2 = A \sqrt{I_1 (I_3 - I_1)} \text{sen} (\beta \omega_3 t + \theta) \quad (31)$$

donde, A y θ son constantes dependen de las condiciones iniciales.

Las ecuaciones (30) y (31) muestran que $\vec{\omega}$ precesa alrededor del eje $\hat{e}_3$ con velocidad angular $\beta \omega_3$, describiendo una pequeña elipse. Esto significa que el movimiento es *estable*.

Una situación similar ocurre cuando $\vec{\omega}$ apunta en un dirección muy cercana al eje de momento de inercia menor (en nuestro ejemplo, I_1). Esto se puede comprobar fácilmente intercambiando los subíndices 1 y 3 en las ecuaciones anteriores. En este caso, $\vec{\omega}$ describe una elipse alrededor del eje $\hat{e}_1$ y el movimiento es nuevamente estable.

La situación es diferente cuando la dirección inicial del eje de rotación del sólido forma un ángulo muy pequeño con el eje de momento de inercia intermedio (I_2). En ese caso las ecuaciones de movimiento son:

$$I_1 \dot{\omega}_3 + (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0 \quad (32)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 = 0 \quad (33)$$

$$I_3 \dot{\omega}_1 = 0 \quad (34)$$

Derivando (32) con respecto al tiempo y utilizando (33) se tiene que:

$$\ddot{\eta}_2 - \alpha^2 \omega_1^2 \eta_2 = 0 \quad (35)$$

$$\ddot{\eta}_3 - \alpha^2 \omega_1^2 \eta_3 = 0 \quad (36)$$

donde,

$$\alpha^2 = \frac{(I_1 - I_3) (I_1 - I_2)}{I_3 I_2} > 0 \quad (37)$$

Figura 3: Ejes principales de una raqueta de tenis

La solución para η_1 es :

$$\eta_1 = A \exp (\alpha \omega_1 t) + B \exp (-\alpha \omega_1 t) \quad (38)$$

donde, A y B son constantes que dependen de las condiciones iniciales del problema.

Claramente, el primer término en (38) crece exponencialmente en el tiempo. Eso implica que $\vec{\omega}$ se aleja rápidamente del eje $\hat{e}_2$, indicando que el movimiento es *inestable*. Lo mismo ocurre con la componente η_3 . Note que, la solución (38) es válida sólo en los inicios del movimiento pues, muy pronto, η_1 deja de ser pequeño y la aproximación: $\eta_1, \eta_3 \ll \omega_2$ en que se obtuvo la solución, deja de ser válida.

Estos resultados pueden ser fácilmente verificados lanzando al aire una raqueta de tenis o un libro empastado (previamente sujeto con un elástico!) e impartiendo una rotación, aproximadamente paralela a uno de los ejes principales, al momento del lanzamiento (Figura 3)

1.0.4 Teorema Trabajo - Energía.

Consideremos un sólido rígido que rota con velocidad angular $\vec{\omega}$ con respecto a un sistema de referencia inercial.

Multipliquemos escalarmente (4) desde la izquierda por $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \left(\frac{d \vec{\omega}}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \wedge \vec{L} = \vec{\omega} \cdot \vec{N} \quad (39)$$

claramente, el segundo término del primer miembro de (39) es nulo. Además, dado que el tensor $\mathbf{I}$ es simétrico se cumple que:

$$\vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \left(\frac{d \vec{\omega}}{dt} \right)_S = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \omega_i I_{ij} \dot{\omega}_j \quad (40)$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \dot{\omega}_j I_{ji} \omega_i = \left(\frac{d \vec{\omega}}{dt} \right)_S \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} \quad (41)$$

Utilizando (41) en (39), se tiene que:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}) = \frac{d T}{dt} = \vec{\omega} \cdot \vec{N} \quad (42)$$

donde,

$$T = \frac{\vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega}}{2} = \frac{\vec{L} \cdot \vec{\omega}}{2} \quad (43)$$

es la energía cinética de rotación del sólido rígido.

Escribiendo (43) en función de las componentes cartesianas se tiene que:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2) \\ &+ I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{xz} \omega_x \omega_z + I_{zy} \omega_z \omega_y \end{aligned} \quad (44)$$

La ecuación (44) define una forma cuadrática. Esta expresión se simplifica en el sistema de coordenadas de los ejes principales, donde el tensor de inercia es diagonal. En ese sistema:

$$T = \frac{1}{2} (I'_{xx} \omega'_x{}^2 + I'_{yy} \omega'_y{}^2 + I'_{zz} \omega'_z{}^2) \quad (45)$$

1.0.5 Descripción del movimiento de un trompo simétrico desde un sistema de referencia inercial, en ausencia de torques externos.

En las secciones precedentes hemos analizado el movimiento de un sólido rígido en un sistema de referencia solidario al cuerpo; sin embargo, en muchos casos es necesario tener una descripción del movimiento desde un sistema de referencia inercial, con respecto al cual el sólido rota con velocidad angular $\vec{\omega}$.

Consideremos un trompo simétrico y dos sistemas de referencia S_0 Y S , ambos con origen en el centro de masa del sólido. Elijamos S_0 como el sistema de referencia inercial y sea S un sistema de referencia solidario al sólido con los ejes de coordenada en la dirección de los ejes principales del tensor de inercia. De (15) y (16) se tiene que:

$$\omega_1 = |A| \cos(\beta \omega_3^0 t + \theta) \quad (46)$$

$$\omega_2 = |A| \sen(\beta \omega_3^0 t + \theta) \quad (47)$$

$$\omega_3 = \omega_3^0 = \text{constante} \quad (48)$$

Además, la energía cinética rotacional tiene el mismo valor en ambos sistemas de referencia (es proporcional al producto escalar de dos vectores):

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{L} \cdot \vec{\omega} \quad (49)$$

Evaluando el primer miembro de (49) en el sistema solidario al sólido, se tiene que:

$$T = \frac{1}{2} [I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2] \quad (50)$$

Dado que el torque externo es nulo, el momentum angular $\vec{L}$ y la energía cinética del sólido se conservan. Pero (48) muestra que $\omega_3 = \text{constante}$; luego de (50) se concluye que $(\omega_1^2 + \omega_2^2)$ es también constante. Escribiendo explícitamente el producto escalar en (49) se obtiene que el coseno del ángulo γ que forman los vectores $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ es constante e igual a:

$$\cos \gamma = \frac{I_1^2 \omega_{\perp}^2 + I_3^2 \omega_3^2}{(I_1^2 \omega_{\perp}^2 + I_3^2 \omega_3^2)^{1/2} (\omega_{\perp}^2 + \omega_3^2)^{1/2}} \quad (51)$$

Note que:

$$\vec{L} = I_1 (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2) + I_3 \omega_3 \hat{e}_3 \quad (52)$$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 \quad (53)$$

Combinando (52) con (53) se obtiene que

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{I_1} + \left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right) \omega_3 I_3 \hat{e}_3 = \frac{\vec{L}}{I_1} - \beta \omega_3 \hat{e}_3 \quad (54)$$

Figura 4: Relación entre los vectores $\vec{L}$, $\vec{\omega}$, $\hat{e}_3$ y $\hat{n}$

donde,

$$\beta = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \quad (55)$$

De (54) se concluye que los vectores $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ y $\hat{e}_3$ son *coplanares*, ya que cualquiera de ellos puede ser expresado como combinación lineal de los otros dos.

El vector unitario $\hat{e}_3$ es un vector fijo en el sistema solidario; luego, la derivada con respecto al tiempo de este vector en el sistema inercial es:

$$\left(\frac{d \hat{e}_3}{dt} \right)_{S_0} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_3 \quad (56)$$

$$= \left(\frac{\vec{L}}{I_1} - \beta \omega_3 \hat{e}_3 \right) \wedge \hat{e}_3 \quad (57)$$

$$\left(\frac{d \hat{e}_3}{dt} \right)_{S_0} = \frac{L}{I_1} \hat{L} \wedge \hat{e}_3 \quad (58)$$

La ecuación (58) muestra que $\hat{e}_3$ precesa en torno de $\vec{L}$ con velocidad angular L/I_1 .

La construcción geométrica que se muestra en la Figura (4) resulta útil para ilustrar la relación entre los diferentes vectores que caracterizan el movimiento de un sólido rígido. Sea $\hat{n}$ un vector unitario perpendicular a $\hat{e}_3$ definido en el plano formado por los vectores $\hat{e}_3$ y $\vec{L}$. Es fácil ver que se cumplen las

Figura 5: Cono espacial y cono solidario para un sólido en forma de oblea

siguientes relaciones:

$$\vec{\omega} = \omega_{\perp} \hat{n} + \omega_3 \hat{e}_3 \quad (59)$$

$$\vec{L} = I_1 \omega_{\perp} \hat{n} + I_3 \omega_3 \hat{e}_3 \quad (60)$$

De (59) y (60) y de la Figura 4 se deduce que:

$$\tan \theta = \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}} = \frac{I_1 \omega_{\perp}}{I_3 \omega_3} \quad (61)$$

$$\tan \alpha = \frac{\omega_{\perp}}{\omega_3} \quad (62)$$

$$(63)$$

Comparando (61) y (62) se tiene que:

$$\tan \theta = \frac{I_1}{I_3} \tan \alpha \quad (64)$$

En la Figura 1.0.5 se muestra una construcción geométrica que ilustra la trayectoria que describen los vectores $\hat{e}_3$ y $\vec{\omega}$ en torno a $\vec{L}$, para el caso de un sólido en forma de *oblea*; i.e.: $I_3 > I_2 = I_1$. En ese caso,

$$\tan \theta < \tan \alpha \quad (65)$$

El vector $\vec{\omega}$ precesa en un cono en torno a vL (cono espacial), simultáneamente en el sistema solidario precesa en torno a $\hat{e}_3$ describiendo otro cono (cono solidario). Mientras ocurre este movimiento, $\hat{e}_3$ precesa a su vez en torno a $\vec{L}$ tal como se demostró en (58).

Figura 6: Cono espacial y cono solidario para un sólido en forma de habano

Cuando el sólido tiene forma de *habano*; i.e.: $I_3 > I_2 = I_1$, el movimiento de los vectores es el que se muestra en la Figura 1.0.6

Entonces:

$$\tan \theta > \tan \alpha \quad (66)$$

Todos los puntos del sólido sobre el eje de rotación están instantáneamente en reposo; por esa razón decimos que el cono solidario rueda sin resbalar sobre el cono espacial.

1.0.6 Desbalance Dinámico.

Consideremos el sólido rígido que se muestra en la Figura ?? , formado por una barra rígida de largo l y masa despreciable en cuyos extremo se han adosado masas puntuales $m_1 = m_2 = m$ Supongamos que el eje de simetría axial del sólido forma un ángulo $\theta = \text{constante}$ con el eje vertical $\hat{z}$ que pasa por su centro de masa y en torno al cual gira con velocidad angular constante $\vec{\omega}$. El sistema de referencia de los ejes principales está definido por el triedro de vectores ortonormales $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.

En el sistema de referencia solidario, la dinámica queda descrita por las ecuaciones de Euler:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 = N_1 \quad (67)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 = N_2 \quad (68)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = N_3 \quad (69)$$

Figura 7: Sólido rígido con simetría axial cuyo eje de rotación no coincide con ninguno de sus ejes principales.

En la Figura 1.0.6 se observa que las componentes del vector ω permanecen constante durante el movimiento. En efecto,

$$\omega_1 = 0 \quad (70)$$

$$\omega_2 = -\omega \sin \theta \quad (71)$$

$$\omega_3 = \omega \cos \theta \quad (72)$$

Reemplazando estos resultados en las ecuaciones de Euler, se obtiene que:

$$N_1 = -(I_3 - I_2) \omega^2 \sin \theta \cos \theta \quad (73)$$

$$N_2 = N_3 = 0 \quad (74)$$

Los momentos de inercia principales del sólido de la Figura 1.0.6 son:

$$I_2 = I_1 = \frac{1}{2} m l^2 \quad I_3 = 0 \quad (75)$$

Entonces:

$$N_1 = \frac{1}{4} \omega^2 m l^2 \sin (2\theta) \quad (76)$$

Note que el momentum angular del sistema es perpendicular a la barra y apunta en la dirección $-\hat{e}_2$.

Resulta fácil verificar que las componentes del torque en el sistema de referencia inercial son:

$$\tau_x = \frac{1}{4} \omega^2 m l^2 \sin (2\theta) \cos(\omega t) \quad (77)$$

$$\tau_y = \frac{1}{4} \omega^2 m l^2 \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}(\omega t) \quad (78)$$

$$\tau_z = 0 \quad (79)$$

Este torque es responsable del cambio de dirección del momentum angular durante la rotación y es ejercido por el eje vertical. La necesidad de este torque produce un desgaste manifiesto del eje que lo ejerce y se conoce con el nombre de *desbalance dinámico*. Por esta razón es importante mantener las ruedas de un automóvil balanceadas dinámicamente ya que, la existencia de un torque produce vibraciones en el volante y un rápido desgaste de los rodamientos y neumáticos del vehículo.

EJERCICIO. En el sistema solidario hemos demostrado que existe un torque (76); sin embargo, en ese mismo sistema las componentes de $\vec{L}$ son constantes. ¿Cómo se explica entonces la existencia de un torque?

1 Algebra de Tensores

En esta sección introduciremos el concepto de tensor y estudiaremos algunas de sus propiedades. Los tensores son funciones vectoriales lineales que actúan sobre vectores u otros tensores. Nuestra presentación estará restringida al estudio de tensores de rango 2 en tres dimensiones. En particular, estaremos interesados en las propiedades del tensor de inercia, que resulta ser central en el estudio de la dinámica de un sólido rígido.

1.1 Díadas.

Sean $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, tres vectores. Definimos la *díada* $\vec{A}\vec{B}$ como un operador matemático tal que, al actuar sobre un vector arbitrario $\vec{C}$ lo transforma en otro vector, de acuerdo a la siguiente regla:

$$(\vec{A}\vec{B}) \cdot \vec{C} \equiv \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C}) \quad (1)$$

La linealidad del producto escalar que aparece al lado derecho en (1) asegura que el producto díada es una función vectorial lineal. En efecto, el producto díada satisface las siguientes relaciones:

$$(\vec{A}\vec{B}) \cdot (\alpha\vec{C}) = \vec{A}(\vec{B} \cdot (\alpha\vec{C})) = \alpha(\vec{A}\vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (2)$$

$$(\vec{A}\vec{B}) \cdot (\vec{C} + \vec{D}) = \vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{D}) \quad (3)$$

$$= (\vec{A}\vec{B}) \cdot \vec{C} + (\vec{A}\vec{B}) \cdot \vec{D} \quad (4)$$

En general, cualquier díada recibe el nombre de tensor de rango 2. ¹

Notación. De aquí en adelante los tensores los escribiremos con letras mayúsculas en negrita. Por ejemplo:

$$\mathbf{T} \equiv (\vec{A}\vec{B}) \quad (5)$$

1.1.1 Suma de Tensores.

Definición: El tensor suma de dos tensores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{S}$ queda definido de acuerdo a la siguiente prescripción:

$$(\mathbf{T} + \mathbf{S}) \cdot \vec{C} = \mathbf{T} \cdot \vec{C} + \mathbf{S} \cdot \vec{C} \quad (6)$$

¹Toda función vectorial lineal es un tensor. Las díadas son tensores de rango 2, las tríadas $\vec{A}\vec{B}\vec{C}$ son tensores de rango 3, etc. Tal como se menciona al comienzo de la sección, en estos apuntes sólo trabajaremos con tensores de rango 2.

donde, $\vec{C}$ es un vector arbitrario.

La suma de un número cualquiera de diádas (tensores de rango 2) recibe el nombre de *diádica*. Es directo demostrar que una diádica es también una función vectorial lineal. Sea $\mathbf{T}$ una diádica, entonces se cumple que:

$$\mathbf{T} \cdot (\vec{C} + \vec{D}) = \mathbf{T} \cdot \vec{C} + \mathbf{T} \cdot \vec{D} \quad (7)$$

$$\mathbf{T} \cdot (\alpha \vec{C}) = \alpha \mathbf{T} \cdot \vec{C} \quad (8)$$

La definición de producto diáda, junto con las relaciones (6), (7) y (8) aseguran que los tensores satisfacen las reglas del algebra normal, con *excepción de la conmutatividad del producto*.

Note que, en forma análoga a (1), podemos definir el producto diáda aplicado sobre un vector colocado a su izquierda:

$$\vec{C} \cdot (\vec{A}\vec{B}) = (\vec{C} \cdot \vec{A}) \vec{B} \quad (9)$$

Comparando (9) con (1) se concluye que, en general el producto diáda *no es conmutativo*; i.e.:

$$\vec{C} \cdot (\vec{A}\vec{B}) \neq (\vec{A}\vec{B}) \cdot \vec{C} \quad (10)$$

Lo mismo es válido para la suma de diádas o tensores. Sea $\mathbf{T}$ un tensor y $\vec{C}$ un vector cualquiera, entonces en general:

$$\mathbf{T} \cdot \vec{C} \neq \vec{C} \cdot \mathbf{T} \quad (11)$$

Una conclusión importante que surge de lo discutido en esta sección es que: *un tensor define una función vectorial lineal y viceversa, que toda función vectorial lineal puede ser representada por un tensor*.

EJEMPLOS DE TENSORES.

a) El Tensor Unidad:

$$\mathbf{1} \equiv \hat{x}\hat{x} + \hat{y}\hat{y} + \hat{z}\hat{z} \quad \text{Note que:} \quad (12)$$

$$\mathbf{1} \cdot \vec{C} = \hat{x}\hat{x} \cdot \vec{C} + \hat{y}\hat{y} \cdot \vec{C} + \hat{z}\hat{z} \cdot \vec{C} \quad (13)$$

$$= (\hat{x} C_x + \hat{y} C_y + \hat{z} C_z) = \vec{C} = \vec{C} \cdot \mathbf{1} \quad (14)$$

b) El Tensor Constante.

$$\mathbf{K} \equiv k \quad \mathbf{1} \quad \text{donde, } k \text{ es un escalar} \quad (15)$$

$$\mathbf{K} \cdot \vec{C} = k \vec{C} \quad (16)$$

c) **El Tensor de Inercia.**

$$\mathbf{I} \equiv \sum_{k=1}^N m_k (\vec{r}_k^2 \mathbf{1} - \vec{r}_k \vec{r}_k) \quad (17)$$

El tensor de inercia es una cantidad central en el estudio de la dinámica de un sólido rígido.

1.1.2 Componentes Cartesianas de un Tensor de Rango 2.

Sea S un sistema de coordenadas cartesiano con origen en O , cuyos ejes apuntan en la dirección definida por el triedro de vectores unitarios $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ expresados en término de sus componentes cartesianas en ese sistema, se escriben como

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \quad \vec{B} = \sum_{i=1}^3 B_i \hat{e}_i \quad \vec{C} = \sum_{i=1}^3 C_i \hat{e}_i \quad (18)$$

Entonces, la díada $\mathbf{T} \equiv \vec{A}\vec{B}$ adopta la forma

$$\mathbf{T} = \vec{A}\vec{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_i B_j \hat{e}_i \hat{e}_j \quad (19)$$

Sea $\vec{C}$ es un vector cualquiera; entonces se tiene que:

$$\mathbf{T} \cdot \vec{C} = \vec{A} (\vec{B} \cdot \vec{C}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_i B_j \hat{e}_i \hat{e}_j \cdot \left(\sum_{k=1}^3 C_k \hat{e}_k \right) \quad (20)$$

$$= \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i \left(\sum_{j=1}^3 C_j B_j \right) = \vec{A} (\vec{C} \cdot \vec{B}) \quad (21)$$

Los números $T_{ij} \equiv A_i B_j$ en (19) son las componentes cartesianas del tensor $\mathbf{T}$ en el sistema de coordenadas elegido. Estas componentes pueden ser ordenadas en forma de una matriz de 3x3 (en un espacio de dimensión 3):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \quad (22)$$

La matriz (22) se llama la *representación matricial* del tensor $\mathbf{T}$ en el sistema de coordenadas elegido.

Note que, las componentes de un tensor *dependen* del sistema de coordenadas, al igual que las componentes de un vector. Sin embargo, el resultado de la acción de un tensor sobre un determinado vector (u otro tensor) es *independiente* del sistema de coordenadas.

Si en (21) elegimos $\vec{C} = \hat{e}_j$ y multiplicamos la expresión resultante desde la izquierda por $\hat{e}_i$, obtenemos el elemento T_{ij} del tensor $\mathbf{T}$:

$$\hat{e}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{e}_j = A_i B_j = T_{ij} \quad (23)$$

EJEMPLO.

Calculemos las componentes cartesianas del tensor de inercia (17) en un sistema de coordenadas cuya base son los vectores unitarios $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$.

Los elementos en la diagonal de la matriz que representa al tensor de inercia reciben el nombre de *momentos de inercia*; mientras que, a aquellos fuera de la diagonal, se les conoce como: *productos de inercia*. Comencemos por calcular los primeros. Utilizando (23) tenemos que:

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{x} &= \hat{x} \cdot \sum_{k=1}^3 m_k (\vec{r}_k^2 \mathbf{1} - \vec{r}_k \vec{r}_k) \cdot \hat{x} \\ I_{xx} &= \sum_{k=1}^3 m_k (y_k^2 + z_k^2) \end{aligned} \quad (24)$$

En forma similar se obtienen los elementos I_{yy} e I_{zz}

$$I_{yy} = \hat{y} \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{y} = \sum_{k=1}^3 m_k (z_k^2 + x_k^2) \quad (25)$$

$$I_{zz} = \hat{z} \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{z} = \sum_{k=1}^3 m_k (x_k^2 + y_k^2) \quad (26)$$

Los productos de inercia son:

$$I_{xy} = \hat{x} \cdot \sum_{k=1}^3 m_k (\vec{r}_k^2 \mathbf{1} - \vec{r}_k \vec{r}_k) \cdot \hat{y} = - \sum_{k=1}^3 x_k y_k \quad (27)$$

$$I_{xz} = \hat{x} \cdot \sum_{k=1}^3 m_k (\vec{r}_k^2 \mathbf{1} - \vec{r}_k \vec{r}_k) \cdot \hat{z} = - \sum_{k=1}^3 x_k z_k \quad (28)$$

$$I_{yz} = \hat{y} \cdot \sum_{k=1}^3 m_k (\vec{r}_k^2 \mathbf{1} - \vec{r}_k \vec{r}_k) \cdot \hat{z} = - \sum_{k=1}^3 y_k z_k \quad (29)$$

Note que, la matriz que representa al tensor de inercia (*matriz de inercia*) es simétrica en los subíndices i y j ; i.e., $I_{ij} = I_{ji}$.

1.1.3 Producto de Tensores

Sean $\mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ dos tensores del mismo rango y $\vec{C}$ un vector, todos ellos definidos en el mismo espacio. De aquí en adelante, supondremos que todos los tensores son de rango 2 y que se trabaja en un espacio de dimensión 3.

Definimos el producto de dos tensores como:

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \cdot \vec{C} \equiv \mathbf{S} \cdot (\mathbf{T} \cdot \vec{C}) \quad (30)$$

Expresando cada tensor en sus componentes cartesianas, (30) se reescribe como:

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \cdot \vec{C} = \mathbf{S} \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k \right) \cdot \vec{C} \quad (31)$$

$$= \left(\sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^3 S_{il} \hat{e}_i \hat{e}_l \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 T_{jk} \hat{e}_j \hat{e}_k \right) \cdot \vec{C} \quad (32)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \hat{e}_i \left(\sum_{j=1}^3 S_{ij} T_{jk} \right) \hat{e}_k \cdot \vec{C} \quad (33)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \hat{e}_i (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})_{ik} \hat{e}_k \cdot \vec{C} \quad (34)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})_{ik} \hat{e}_i \hat{e}_k \right) \cdot \vec{C} \quad (35)$$

Comparando (33) con (34) se aprecia que los elementos de la matriz del tensor producto $\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}$ se obtienen utilizando las reglas usuales de la multiplicación de matrices.

La suma y la multiplicación de tensores obedecen las reglas usuales del álgebra, excepto que el producto de dos tensores no es conmutativo. Explícitamente, si $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ y $\mathbf{K}$ son tres tensores, entonces se cumple que:

$$\mathbf{T} + \mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathbf{T} \quad (36)$$

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{K}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{K} \quad (37)$$

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{K}) = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{K} \quad (38)$$

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{1} \quad \text{donde, } \mathbf{1} \text{ es el tensor unidad} \quad (39)$$

Sin embargo, en general

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \neq \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \quad (40)$$

1.1.4 El Tensor Transpuesto.

Se define el tensor *transpuesto* $\mathbf{T}^t$ de un tensor $\mathbf{T}$ a través de la relación:

$$\mathbf{T}^t \cdot \vec{C} \equiv \vec{C} \cdot \mathbf{T} \quad (41)$$

En notación matricial, el vector $\vec{C}$ que aparece al lado izquierdo en (41) está representado por una matriz de 3x1 (*vector columna*); mientras que, aquel que aparece al lado derecho está representado por una matriz de 1x3 (*vector fila*).

La definición (41) es equivalente a escribir:

$$(\mathbf{T}^t)_{ij} = (\mathbf{T})_{ji} \quad (42)$$

TAREA.

Utilizando (41) pruebe la relación (42). Entonces, demuestre las siguientes relaciones:

$$(\mathbf{T} + \mathbf{S})^t = \mathbf{T}^t + \mathbf{S}^t \quad (43)$$

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})^t = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{T}^t \quad (44)$$

$$(\mathbf{T}^t)^t = \mathbf{T} \quad (45)$$

1.1.5 Tensores simétricos y antisimétricos.

Un tensor se dice *simétrico* cuando $T_{ij} = T_{ji}$ y *antisimétrico* cuando $T_{ij} = -T_{ji}$.

Claramente, la definición de tensor antisimétrico implica que $T_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$. Esto significa que un tensor antisimétrico queda completamente definido por tres elementos de matriz y eso permite que pueda ser representado como un vector (en rigor, se trata de un *pseudovector* pues, transforma igual que todo vector bajo rotaciones; sin embargo, a diferencia de los vectores, no cambia de signo bajo inversión con respecto al origen del sistema de coordenadas).

EJEMPLO.

El operador producto vectorial de un vector $\vec{\omega}$, es un tensor antisimétrico de rango 2.

$$\mathbf{T} \equiv \vec{\omega} \wedge \quad (46)$$

Este tensor está representado por la matriz:

$$\mathbf{T} \wedge = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

El producto vectorial $\vec{\omega} \wedge \vec{C}$ se calcula multiplicando la matriz (47) por un vector columna formado por las componentes del vector $\vec{C}$.

Cualquier tensor $\mathbf{T}$ puede ser escrito como la suma de un tensor simétrico y otro antisimétrico. En efecto, siempre es posible definir dos tensores $\mathbf{T}_S$ y $\mathbf{T}_A$, uno simétrico y el otro antisimétrico, de la siguiente manera:

$$\mathbf{T}_S \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^t) \quad \mathbf{T}_A \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^t) \quad (48)$$

Claramente,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_A \quad (49)$$

En particular, si $\mathbf{T}$ es simétrico, entonces: $\mathbf{T}_A = 0$; mientras que, si $\mathbf{T}$ es antisimétrico, $\mathbf{T}_S = 0$.

1.2 Rotaciones.

1.2.1 Transformación de las componentes de un tensor bajo rotaciones.

Sean S y S' dos sistemas de coordenadas cartesianos con origen común y definidos por los triedros de vectores ortonormales $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ y $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$, respectivamente.

Un vector $\vec{A}$ cualquiera puede ser escrito indistintamente en función de sus componentes en ambos sistemas de coordenadas:

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^3 A_i \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 A_i' \hat{e}_i' \quad (50)$$

Multiplicando escalarmente (50) por el vector unitario $\hat{e}_k'$, se obtiene que:

$$A_k' = \sum_{i=1}^3 A_i (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_k') \equiv \sum_{i=1}^3 A_i a_{ki} \quad (51)$$

donde, hemos definido el coeficiente a_{ki} como:

$$a_{ki} = \hat{e}_k' \cdot \hat{e}_i \quad (52)$$

Multiplicando (50) por $\hat{e}_k$, se obtiene que

$$A_k = \sum_{i=1}^3 A_i' (\hat{e}_i' \cdot \hat{e}_k) \equiv \sum_{i=1}^3 A_i' a_{ik} \quad (53)$$

$$= \sum_{i=1}^3 A_i' (a^t)_{ki} \quad (54)$$

Consideremos ahora un tensor $\mathbf{T}$ expresado en ambos sistemas de referencia:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} \hat{e}_i \hat{e}_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}' \hat{e}_i' \hat{e}_j' \quad (55)$$

Entonces, utilizando (23) en (55) y considerando la definición (52), podemos escribir que:

$$T_{kl}' = \hat{e}_k' \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{e}_l' = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij} a_{ki} a_{lj} \quad (56)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ki} T_{ij} a_{jl}^t \quad (57)$$

En otras palabras,

$$\mathbf{T}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^t \quad (58)$$

1.2.2 Propiedades de la matriz de rotación ($\mathbf{a}$).

Volviendo a la definición (52) de los elementos de la matriz de rotación, vemos que los coeficientes a_{ki} también corresponden a las componentes del vector unitario $\hat{e}_k'$ en el sistema de coordenadas S . En efecto:

$$\hat{e}_k' = \sum_{i=1}^3 (\hat{e}_k' \cdot \hat{e}_i) \hat{e}_i = \sum_{i=1}^3 a_{ki} \hat{e}_i \quad (59)$$

Dado que cada triedro de vectores, $\{\hat{e}_1', \hat{e}_2', \hat{e}_3'\}$ y $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ es ortonormal, de (59) se obtiene que

$$\hat{e}_k' \cdot \hat{e}_m' = \delta_{km} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ki} a_{mj} \delta_{ij} \quad (60)$$

Sumando sobre el índice j , se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ki} a_{mi} = \delta_{km} \quad (61)$$

Intercambiando en (60) los vectores unitarios con superíndice prima por aquellos sin prima y repitiendo el procedimiento recién descrito, se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ik} a_{im} = \delta_{km} \quad (62)$$

La relación (61) puede reescribirse como:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ki} a_{mi} = \delta_{km} = \sum_{i=1}^3 a_{ki} a_{im}^t = (aa^t)_{km} \quad (63)$$

En una notación más compacta (63) toma la forma:

$$\mathbf{1} = \mathbf{a} \mathbf{a}^t \quad (64)$$

Análogamente, a partir de (62) se demuestra que:

$$\mathbf{a}^t \mathbf{a} = \mathbf{1} \quad (65)$$

La matriz de un tensor que satisface (61) y (62) o alternatively, el tensor que satisface (64) y (65) se dice que es *ortogonal*. Las relaciones (61) y (62) proveen seis ecuaciones algebraicas para los coeficientes a_{ij} . Luego, de los nueve elementos de la matriz de rotación, solamente tres son independientes. Estos bastan para determinar la orientación del sistema S' con respecto a S . En efecto, dos ángulos se requieren para determinar la orientación del eje x' del sistema S' con respecto a S . El eje y' se elige perpendicular a x' . La orientación del plano $x'y'$ queda determinada especificando un tercer ángulo. La dirección de z' es perpendicular al plano $x'y'$. El sentido del vector $\hat{z}'$ se elige siguiendo una de las convenciones que se discuten a continuación.

Un triedro de vectores ortonormales que satisface la relación:

$$\hat{e}_1' \wedge \hat{e}_2' = \hat{e}_3' \quad (66)$$

se denomina *dextro* o que sigue la *regla de la mano derecha*.

En particular, se cumple que $\hat{e}_1' \cdot (\hat{e}_2' \wedge \hat{e}_3') = 1$

Por otra parte, cuando los vectores se eligen de manera que:

$$\hat{e}_1' \wedge \hat{e}_2' = -\hat{e}_3' \quad (67)$$

Se dice que el sistema es *levo* o que satisface la *regla de la mano izquierda*.

En este caso, se cumple que:

$$\hat{e}_1' \cdot (\hat{e}_2' \wedge \hat{e}_3') = -1 \quad (68)$$

Note que:

$$\hat{e}_1' \cdot (\hat{e}_2' \wedge \hat{e}_3') = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (69)$$

donde, el determinante de la matriz de rotación es igual a $+1$ si ambos sistemas de coordenadas S y S' son *dextro* o ambos son *levo*. Si uno de ellos es *dextro* y el otro *levo*, el determinante tiene el valor -1 .

1.2.3 Interpretación alternativa de las ecuaciones de transformación.

Las ecuaciones (51) y (57) expresan las componentes de un vector o de un tensor en un sistema de referencia S' en función de sus componentes en un sistema de coordenadas S , que se encuentra rotado con respecto a S' . Formalmente, esas ecuaciones se pueden escribir como:

$$\vec{C}' = \mathbf{a} \cdot \vec{C} \quad (70)$$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^t \quad (71)$$

Conviene recalcar que los vectores y los tensores son objetos que no cambian en una rotación del sistema de coordenadas; lo que cambia son sus componentes. Sin embargo, a menudo resulta conveniente reinterpretar $\vec{C}'$ en (70) y $\mathbf{T}'$ en (71) como un nuevo vector o un nuevo tensor, en el mismo sistema S , generados por acción de la rotación sobre los vectores y tensores originales. Esta última interpretación resulta útil para demostrar ciertas propiedades algebraicas; cuya validez, es ciertamente independiente de la interpretación usada.

Algunas Propiedades Útiles.

1)

$$(\mathbf{T}')^t = (\mathbf{a} \mathbf{T} \mathbf{a}^t)^t = (\mathbf{a}^t)^t (\mathbf{a} \mathbf{T})^t = \mathbf{a} \mathbf{T}^t \mathbf{a}^t = (\mathbf{T}^t)' \quad (72)$$

2) La traza de un tensor es invariante bajo rotaciones.

$$Tr \mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 T_{ii} \quad (73)$$

$$Tr \mathbf{T}' = Tr (\mathbf{a} \mathbf{T} \mathbf{a}^t) = Tr (\mathbf{a}^t \mathbf{a} \mathbf{T}) = Tr \mathbf{T} \quad (74)$$

donde, hemos utilizado (65) y la propiedad que la traza de un producto de matrices es cíclica.

3) Sea S un sistema de coordenadas que experimenta dos rotaciones sucesivas: $\mathbf{a}_1$ y luego $\mathbf{a}_2$. Entonces, si $\vec{C}$ es un vector arbitrario, se cumple que:

$$\vec{C}' = \mathbf{a}_1 \vec{C} \quad (75)$$

$$\vec{C}'' = \mathbf{a}_2 \vec{C}' = \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \vec{C} \quad (76)$$

$$\implies \mathbf{a} = \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \quad (77)$$

2 Diagonalización de un Tensor Simétrico.

Un tensor $\mathbf{T}$ se dice que está en su forma diagonal, cuando la matriz que lo representa tiene la forma:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix} \quad (78)$$

El sistema de referencia donde la matriz es diagonal, recibe el nombre de *Sistema de Ejes Principales*.

En ese sistema se cumple que:

$$(\mathbf{T} \cdot \vec{C})_i = T_i C_i \quad i=1,2,3 \quad (79)$$

La importancia de la representación diagonal de un tensor deriva del siguiente teorema:

”Cualquier tensor *simétrico* puede ser llevado a su forma diagonal mediante una transformación ortogonal. Los elementos de la diagonal (*autovalores*) son únicos, excepto por el orden en que aparecen en la matriz. A su vez, los ejes de coordenadas del sistema son únicos, excepto cuando existe *degeneración*; i.e., cuando dos o más autovalores son iguales ”.

Este teorema estipula que siempre existe un sistema de coordenadas en el cual un tensor simétrico está representado por una matriz diagonal. Los elementos en la diagonal se denominan *autovalores o valores propios*. A cada autovalor corresponde un *autovector o vector propio* que define uno de los ejes de coordenada del sistema de ejes principales.

Cualquier vector paralelo a uno de los ejes principales se denomina *autovector*. La acción del tensor sobre un autovector tiene como resultado multiplicar el vector por el autovalor correspondiente.

$$\mathbf{T} \cdot \vec{C} = \lambda \vec{C} \quad (80)$$

La propiedad de ser autovector es independiente del sistema de coordenadas. En efecto, sea $\mathbf{a}$ una transformación ortogonal, entonces, utilizando (65), la relación (80) se puede reescribir como:

$$\mathbf{T}(\mathbf{a}^t \mathbf{a}) \vec{C} = \lambda \vec{C} \quad (81)$$

Multiplicando (81) desde la izquierda por $\mathbf{a}$, se tiene:

$$(\mathbf{a} \mathbf{T} \mathbf{a}^t)(\mathbf{a} \vec{C}) = \lambda (\mathbf{a} \vec{C}) \quad (82)$$

$$\mathbf{T} \vec{C} = \lambda \vec{C} \quad (83)$$

En general, un tensor simétrico queda determinado por seis elementos de matriz. En el sistema de ejes principales estos son: los tres elementos de la diagonal y los tres ángulos que se necesitan para fijar la orientación del sistema de ejes principales en el espacio.

Degeneración.

Si dos o más autovalores son iguales, decimos que éstos son degenerados (doble o triplemente degenerados). En particular, un tensor de rango 2 triplemente degenerado en el espacio de tres dimensiones, es un tensor constante y consecuentemente, se mantiene diagonal en cualquier sistema de coordenadas.

Si dos autovalores son iguales, por ejemplo $T_1 = T_2 \neq T_3$; entonces, cualquier combinación lineal de dos autovectores linealmente independientes, con autovalor: $T_1 = T_2$, también es un autovector, con autovalor T_1 . En efecto, sean $\hat{a}_1$ y $\hat{a}_2$ dos autovectores con autovalor T_1 ; entonces:

$$\mathbf{T} (\alpha \hat{a}_1 + \beta \hat{a}_2) = T_1 (\alpha \hat{a}_1 + \beta \hat{a}_2) \quad (84)$$

donde, α y β son escalares arbitrarios.

2.1 Procedimiento para encontrar los autovalores y autovectores de un tensor simétrico.

Sea $\vec{C}$ un autovector de un tensor simétrico $\mathbf{T}$; entonces, (80) se escribe como:

$$(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}) \cdot \vec{C} = 0 \quad (85)$$

En un sistema de coordenadas arbitrario, el autovector $\vec{C}$ se escribe como

$$\vec{C} = C_1 \hat{e}_1 + C_2 \hat{e}_2 + C_3 \hat{e}_3 \quad (86)$$

y la matriz del tensor $\mathbf{T}$ tiene elementos T_{ij} en la diagonal y también fuera de ella. En término de las componentes cartesianas, la ecuación (85) da origen el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo:

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) C_1 + T_{12} C_2 + T_{13} C_3 &= 0 \\ T_{21} C_1 + (T_{22} - \lambda) C_2 + T_{23} C_3 &= 0 \\ T_{31} C_1 + T_{32} C_2 + (T_{33} - \lambda) C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (87)$$

La solución trivial para este sistema es $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. La condición para que exista una solución de (87) distinta de la trivial, es que el determinante de los coeficientes sea nulo; i.e.:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (88)$$

El desarrollo de este determinante da lugar a una ecuación de tercer grado en el parámetro λ llamada *ecuación secular*. Las tres raíces de esa ecuación son los tres autovalores del tensor. Reemplazando sucesivamente cada autovalor en (87), se obtienen las componentes de los correspondientes autovectores. Dividiendo cada una de las ecuaciones en (87) por C_3 se obtiene un sistema de 3 ecuaciones y dos incógnitas, C_1/C_3 y C_2/C_3 ; consecuentemente, una de las ecuaciones es linealmente dependiente y eso significa que C_3 queda indeterminado. Al imponer una condición adicional de normalización sobre los autovectores, este problema desaparece.

Antes de seguir adelante, conviene probar las siguientes proposiciones:

Lema I *Las raíces de la ecuación secular (88), de un tensor simétrico real, son reales.*

Sea $\vec{C}$ un autovector del tensor simétrico $\mathbf{T}$ y $\vec{C}^*$ un vector cuyas componentes son el complejo conjugado de las componentes de $\vec{C}$. Entonces, multiplicando (80) desde la izquierda por $\vec{C}^*$ se tiene que:

$$\vec{C}^* \cdot \mathbf{T} \vec{C} = \lambda \vec{C}^* \cdot \vec{C} \quad (89)$$

Tomando el complejo conjugado de la ecuación (80), se tiene que

$$\mathbf{T} \cdot \vec{C}^* = \lambda^* \vec{C}^* \quad (90)$$

Utilizando la definición de tensor transpuesto y el hecho que $\mathbf{T}$ es simétrico, se puede escribir que:

$$\vec{C}^* \mathbf{T} = \lambda^* \vec{C}^* \quad (91)$$

Multiplicando (91) desde la derecha por $\vec{C}$ y comparando con (89) se concluye que:

$$\lambda = \lambda^* \quad (92)$$

Lema II. *Autovalores distintos de un tensor simétrico $\mathbf{T}$, corresponden a autovectores mutuamente ortogonales.*

Sean λ_1 y λ_2 dos autovalores distintos del tensor $\mathbf{T}$ y $\vec{C}_1$ y $\vec{C}_2$ los correspondientes autovectores. Entonces se tiene que:

$$\mathbf{T} \cdot \vec{C}_1 = \lambda_1 \vec{C}_1 \quad (93)$$

La ecuación transpuesta de (93) es

$$\vec{C}_1 \cdot \mathbf{T}^t = \vec{C}_1 \cdot \mathbf{T} = \lambda_1 \vec{C}_1 \quad (94)$$

donde hemos usado que $\mathbf{T} = \mathbf{T}^t$ para un tensor simétrico.

Para el autovalor λ_2 se cumple que:

$$\mathbf{T} \cdot \vec{C}_2 = \lambda_2 \vec{C}_2 \quad (95)$$

Multiplicando esta ecuación desde la izquierda por $\vec{C}_1$ y (94) desde la derecha por $\vec{C}_2$ y restando ambas ecuaciones, se tiene que:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = 0 \quad (96)$$

Ya que por hipótesis, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se concluye que

$$\vec{C}_1 \cdot \vec{C}_2 = 0 \quad (97)$$

EJEMPLO: Diagonalización de un tensor simétrico.

Sea:

$$\mathbf{T} = \vec{A} \vec{A} + \vec{B} \vec{D} + \vec{D} \vec{B} \quad (98)$$

$$\vec{A} = 4a \hat{e}_1 \quad (99)$$

$$\vec{B} = 7a \hat{e}_2 + a \hat{e}_3 \quad (100)$$

$$\vec{D} = a \hat{e}_2 - a \hat{e}_3 \quad (101)$$

La matriz que representa a este tensor en la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ es

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 16a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 14a^2 & -6a^2 \\ 0 & -6a^2 & -2a^2 \end{pmatrix} \quad (102)$$

En este ejemplo, el sistema de ecuaciones (87) se reduce a:

$$\begin{aligned} (16a^2 - \lambda) C_1 &= 0 \\ (14a^2 - \lambda) C_2 - 6a^2 C_3 &= 0 \\ 6a^2 C_2 - (2a^2 + \lambda) C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (103)$$

La correspondiente ecuación secular es:

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}) = \det \begin{vmatrix} 16a^2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 14a^2 - \lambda & -6a^2 \\ 0 & -6a^2 & -2a^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (104)$$

La resolución del determinante da origen a la ecuación algebraica:

$$(16a^2 - \lambda)\{(14a^2 - \lambda)(-2a^2 - \lambda) - 36a^4\} = 0 \quad (105)$$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 16a^2 \quad \lambda_3 = -4a^2 \quad (106)$$

Las componentes cartesianas de los autovectores correspondientes al autovalor degenerado $\lambda_1 = 16a^2$ se obtienen reemplazando este valor en el sistema de ecuaciones (103). Es fácil verificar que la primera ecuación se anula y que de las dos ecuaciones restantes sólo una es linealmente independiente. Como resultado se obtiene que:

$$C_2 = -3 C_3 \quad (107)$$

Los coeficientes C_1 y C_3 quedan indeterminados; consecuentemente, para este autovalor se tiene una familia de autovectores $\hat{a}_1$, cuya forma genérica es:

$$\hat{a}_1 = C_1 \hat{e}_1 - 3C_3 \hat{e}_2 + C_3 \hat{e}_3 \quad (108)$$

Elijamos uno de ellos: $\hat{e}_1'$ tal que $C_1 = 1$ y $C_3 = 0$; i.e.:

$$\hat{e}_1' = \hat{e}_1 \quad (109)$$

De la misma familia (108) seleccionemos un segundo autovector $\vec{b}$, con la condición que sea perpendicular a $\hat{e}_1'$; i.e.:

$$\vec{b} \cdot \hat{e}_1' = (C_1 \hat{e}_1 + C_2 \hat{e}_2 + C_3 \hat{e}_3) \cdot \hat{e}_1 = 0 \quad (110)$$

De (110) se deduce que $C_1 = 0$ y utilizando (107), podemos escribir que:

$$\vec{b} = C_3(-3\hat{e}_2 + \hat{e}_3) \quad (111)$$

El vector $\vec{b}$ normalizado se elige como el segundo autovector con autovalor λ_1 :

$$\hat{e}_2' = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = -\frac{3}{\sqrt{10}} \hat{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{10}} \hat{e}_3 \quad (112)$$

Cualquier otro vector de la familia (108) se expresa como una combinación lineal de $\hat{e}_1'$ y $\hat{e}_2'$. El tercer autovector, $\hat{e}_3'$, de autovalor $\lambda_3 = -4a^2$ es necesariamente perpendicular a los dos primeros (Lema II). El autovector $\hat{e}_3'$ se escribe como:

$$\hat{e}_3' = \hat{e}_1' \wedge \hat{e}_2' \quad (113)$$

2.2 El tensor de Inercia

El tensor de inercia de un sólido rígido formado por un conjunto discreto de partículas tiene la forma:

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^3 m_k (\vec{r}_k^2 - \vec{r}_k \vec{r}_k) \quad (114)$$

Cuando la distribución de masa es continua, las sumatorias en (114) pasan a ser integrales y el tensor de inercia se escribe como:

$$\mathbf{I} = \int_V \rho(\vec{r}) (\vec{r}' \cdot \vec{r}' - \vec{r}' \vec{r}') dV' \quad (115)$$

donde V es el volumen del sólido.

Las componentes cartesianas de la matriz de inercia en un sistema de coordenadas dado se calculan de la forma usual:

$$I_{ij} = \hat{e}_i \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{e}_j \quad (116)$$

A menudo es necesario calcular el momento de inercia con respecto a un eje paralelo a la dirección definida por un vector unitario $\hat{n}$. Esto es fácil de calcular si aplicamos (116) a un sistema de coordenadas uno de cuyos ejes coincide con el vector unitario $\hat{n}$; entonces:

$$I_{nn} = \hat{n} \cdot \mathbf{I} \cdot \hat{n} \quad (117)$$

Muchas veces es más fácil calcular las componentes del tensor de inercia en un sistema de coordenadas elegido convenientemente y luego utilizar (117) para encontrar las componentes del tensor en el sistema en que se necesita conocerlas.

Las propiedades de simetría del cuerpo pueden facilitar en forma importante el cálculo de los elementos de matriz del tensor de inercia. Así por ejemplo, si el cuerpo posee un plano de simetría, conviene elegir el origen del sistema de

coordenadas sobre el plano y uno de sus ejes (digamos el eje x), perpendicular al plano. Entonces, se cumple que

$$\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) \quad (118)$$

Así, el elemento de matriz I_{xx} se escribe como:

$$I_{xx} = - \int_{x=-a}^{x=a} \int \int \rho(x, y, z) x y dx dy dz \quad (119)$$

El integrando en (119) es una función impar de la variable x ; mientras que, el intervalo de integración es simétrico. Consecuentemente, la integral (119) se anula. Lo mismo es cierto para el elemento I_{xz} . Este resultado nos permite asegurar que el eje x es un eje principal del sólido. En general:

Cualquier plano de simetría de un cuerpo es perpendicular a un eje principal.

2.2.1 Generalización del Teorema de los ejes paralelos.

Consideremos un sistema de coordenadas fijo (S), con origen en O y un segundo sistema (S') con origen en el centro de masa del sólido G , cuyos ejes de coordenadas son mutuamente paralelos. El vector de posición de G con respecto a O es $\vec{R}$. Entonces, los vectores de posición de un punto k en los sistemas S y S' están relacionados por la ecuación:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R} \quad (120)$$

Utilizando (120), el tensor de inercia se escribe como

$$\mathbf{I}_O = \int \rho(\vec{r})(\vec{r}^2 - \vec{r} \vec{r}) dV \quad (121)$$

$$= \int \rho(\vec{r}')(R^2 + r'^2 + 2 \vec{R} \cdot \vec{r}') dV' \quad (122)$$

$$- \int \rho(\vec{r}')(\vec{R} \vec{R} + \vec{R} \vec{r}' + \vec{r}' \vec{R} + \vec{r}' \vec{r}') dV' \quad (123)$$

$$(124)$$

Reagrupando términos:

$$\mathbf{I}_O = \overbrace{\int \rho(\vec{r}')(r'^2 - \vec{r}' \vec{r}') dV'}^{I_G} \quad (125)$$

$$+ R^2 \int \rho(\vec{r}') dV' - \vec{R} \cdot \vec{R} \int \rho(\vec{r}') dV' \quad (126)$$

$$+ 2\vec{R} \cdot \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV' \quad (127)$$

$$- \vec{R} \cdot \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV' - \vec{R} \cdot \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV' \quad (128)$$

Pero, en el sistema centro de masa se cumple que:

$$\int \rho(\vec{r}') \vec{r}' dV' = 0 \quad (129)$$

Entonces, (127) y (128) se anulan y el tensor $\mathbf{I}_O$ adopta la forma:

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_G + M(R^2 - \vec{R} \cdot \vec{R}) \quad (130)$$

donde, M es la masa total e $\mathbf{I}_G$ es el tensor de inercia en el sistema de referencia con origen en el centro de masa del sólido.

EJEMPLO. Translación del origen del sistema de coordenadas.

Considere que la matriz del tensor de inercia de un sólido rígido es diagonal en un sistema de coordenadas con origen en el centro de masa del sólido.

$$I_G = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (131)$$

Calcule los elementos de matriz del tensor de inercia en un sistema de coordenadas cuyos ejes son paralelos al original pero desplazado con respecto a este en un vector $\vec{S} = X \hat{x} + Y \hat{y}$. Claramente, $\vec{R}$ en (130) es igual a $-\vec{S}$. Entonces, la matriz que representa al tensor de inercia en sistema de referencia con origen en O es:

$$I_O = \begin{pmatrix} I_1 + Y^2 & -X Y & 0 \\ -X Y & I_2 + X^2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 + X^2 + Y^2 \end{pmatrix} \quad (132)$$

Claramente, la matriz de inercia deja de ser diagonal luego de la translación. Sin embargo, si la translación es paralela a cualquiera de los ejes principales, el tensor de inercia conserva su forma diagonal.

EJERCICIO. Considere dos sistemas de coordenadas con sus ejes paralelos cuyos orígenes están desplazados una distancia R_1 . Utilizando el teorema generalizado de los ejes paralelos, exprese el momento de inercia de un cuerpo

en uno de los sistemas en función del momento de inercia en el otro. Suponga conocida la posición del centro de masa y el momento de inercia del cuerpo con respecto al centro de masa.

EJEMPLO: Diagonalización de la matriz de inercia

Se desea diagonalizar la matriz del tensor de inercia de una pirámide de densidad uniforme, altura $3a/2$ y cuya base tiene la forma de un triángulo rectángulo isósceles de cateto a .

La Figura 2.2.1 muestra un sistema de coordenadas que resulta conveniente para hacer los cálculos. De inmediato se observa que la simetría de la pirámide asegura que:

$$I_{xx} = I_{yy} \quad I_{xz} = I_{yz} \quad (133)$$

El elemento de matriz I_{xx} es:

$$I_{xx} = \int_0^{3a/2} dz \int_0^{a-2z/3} dy \int_0^{a-y-2z/3} \rho_0 (y^2 + z^2) dx \quad (134)$$

La Figura 2.2.1 muestra dos vistas de la pirámide para ayudar a encontrar los límites de integración usados en (134).

Con el propósito de hacer más clara la presentación resulta conveniente definir las siguientes cantidades:

$$J_1 = \rho_0 \int_0^{3a/2} dz \int_0^{a-2z/3} dy \int_0^{a-y-2z/3} y^2 dx \quad (135)$$

$$J_2 = \rho_0 \int_0^{3a/2} dz \int_0^{a-2z/3} dy \int_0^{a-y-2z/3} z^2 dx \quad (136)$$

$$J_3 = \rho_0 \int_0^{3a/2} dz \int_0^{a-2z/3} dy \int_0^{a-y-2z/3} xy dx \quad (137)$$

$$J_4 = \rho_0 \int_0^{3a/2} dz \int_0^{a-2z/3} dy \int_0^{a-y-2z/3} yz \, dx \quad (138)$$

$$M = \rho_0 \int_0^{3a/2} dz \int_0^{a-2z/3} dy \int_0^{a-y-2z/3} dx = \rho_0 \frac{a^3}{6} \quad (139)$$

donde M es la masa de la pirámide. Así, (134) se escribe como $I_{xx} = J_1 + J_2$.

Calculando explícitamente J_1 , J_2 , J_3 y J_4 , la matriz de inercia en el sistema de coordenadas que se muestra en la figura (2.2.1) adopta la forma: tiene que:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} J_1 + J_2 & -J_3 & -J_4 \\ -J_3 & J_1 + J_2 & -J_4 \\ -J_4 & -J_4 & 2J_1 \end{pmatrix} = \frac{Ma^2}{40} \begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 13 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad (140)$$

En lugar de encontrar directamente los autovalores de la matriz (140), conviene utilizar previamente la simetría de la pirámide. Claramente, el plano $y''z$ que se muestra en la Figura 2.2.1 es un plano de simetría de la pirámide; consecuentemente, el eje x'' es uno de los ejes principales.

Llevemos a cabo entonces, una rotación en 45° en torno al eje z que lleve los ejes $\{x, y, z\}$ en coincidencia con los ejes $\{x'', y'', z\}$.

Los elementos de matriz de esta rotación son:

$$\begin{aligned} a_{11} &\equiv \hat{e}_1'' \cdot \hat{e}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} & a_{12} &\equiv \hat{e}_1'' \cdot \hat{e}_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2} & a_{13} &= 0 \\ a_{21} &\equiv \hat{e}_2'' \cdot \hat{e}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} & a_{22} &\equiv \hat{e}_2'' \cdot \hat{e}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} & a_{23} &= 0 \\ a_{31} &\equiv \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = 0 & a_{32} &\equiv \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2 = 0 & a_{33} &= 1 \end{aligned} \quad (141)$$

Utilizando (141) se calcula la matriz de inercia en el nuevo sistema de coor-

denadas:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{a}^t = \frac{Ma^2}{40} \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -3\sqrt{2} \\ 0 & -3\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix} \quad (142)$$

Los autovalores de esta matriz se encuentran resolviendo el determinante de la matriz secular $(\mathbf{I}' - \lambda \mathbf{1})$ e igualándolo a cero. Los valores que se obtienen son:

$$I_1 = \frac{3}{8}Ma^2 \quad I_2 = \frac{Ma^2}{8} \quad I_3 = \frac{7}{20}Ma^2 \quad (143)$$

Autovectores. Dado que la simetría de la pirámide permite identificar al eje x'' como uno de los ejes principales, el primer autovector resulta ser : $\hat{e}_1''$

$$\hat{e}_1'' = \frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2) \quad (144)$$

Note que:

$$\mathbf{I}' \cdot \hat{e}_1'' = \frac{3}{8}Ma^2 \hat{e}_1'' \quad (145)$$

es decir, $3Ma^2/8$ es el autovalor correspondiente a $\hat{e}_1''$.

Calculemos ahora el autovector correspondiente al autovalor I_2 . Para ello escribimos explícitamente la ecuación de autovalores:

$$\mathbf{I}' \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \frac{Ma^2}{8} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad (146)$$

Llevando a cabo la multiplicación en (146) se obtienen tres ecuaciones, una de las cuales es linealmente dependiente. De las otras dos resulta que:

$$A_1 = 0 \quad (147)$$

$$6A_2 - 3\sqrt{2}A_3 = 0 \implies \quad (148)$$

$$A_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}A_3 \quad (149)$$

Así , el autovector buscado tiene la siguiente forma:

$$\vec{A} = A_2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{e}_2'' + \hat{e}_3 \right) \quad (150)$$

Pero,

$$\hat{e}_2'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{e}_2 \quad (151)$$

Reemplazando este resultado en (150) y normalizando el vector $\vec{A}$, se tiene que:

$$\hat{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{e}_2 + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{e}_3 \quad (152)$$

El tercer autovector sabemos que es perpendicular a los dos ya construidos:

$$\hat{e}_3' = \hat{e}_1' \wedge \hat{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\hat{e}_3 - \hat{e}_2 + \hat{e}_3) \quad (153)$$

Los autovectores $\hat{e}_3$ y $\hat{e}_2'$ están contenidos en el plano de simetría de la pirámide.

1 Dinámica Lagrangeana.

1.0.1 Introducción

En este capítulo presentaremos los principios básicos de la mecánica clásica de acuerdo a una formulación conocida como método de Lagrange. Una de la mayores ventajas de este planteamiento es que provee un manejo eficiente de las fuerzas de restricción presentes en el sistema. El método incorpora implícitamente las ecuaciones de restricción en la teoría, disminuyendo simultáneamente el número de ecuaciones necesarias para describir la dinámica del sistema. En este esquema, las fuerzas de restricción se calculan una vez encontrada la solución de las ecuaciones de movimiento. Opcionalmente, las restricciones se pueden incorporar explícitamente en la teoría utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange. Entonces, todas las coordenadas se tratan como variables independientes.

La disposición en el espacio de un sistema de N partículas se domina la *configuración* del sistema y está definida por los vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$; i.e., por $3N$ coordenadas. El número de cantidades *independientes* que es necesario especificar para definir en forma única una configuración se conoce con el nombre de *grados de libertad* del sistema. Si todas las coordenadas de las partículas son independientes, el número de grados de libertad es $3N$. Sin embargo, cuando existen relaciones entre las coordenadas, el número de coordenadas independientes es menor que $3N$. Cualquier conjunto de cantidades $q_1, q_2, \dots, q_s$, que definen completamente la configuración de un sistema de s grados de libertad se denominan *coordenadas generalizadas* del sistema. Sus derivadas con respecto al tiempo se conocen como *velocidades generalizadas*, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N$.

1.0.2 Relaciones de Restricción.

Consideremos un sistema de N partículas, cuyas coordenadas cartesianas son $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots; x_N, y_N, z_N$. Para facilitar la presentación, rotularemos las coordenadas de acuerdo a la siguiente convención:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & y_1 & z_1 & x_2 & y_2 & z_2 & \dots & x_N & y_N & z_N \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \dots & x_{3N-2} & x_{3N-1} & x_{3N} \end{array} \quad (1)$$

Por conveniencia tipográfica definimos:

$$3N \equiv n \quad (2)$$

Figura 1: Movimiento de una partícula restringido a la superficie $f(x, y, z) = \text{constante}$.

Supongamos que existen k ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas de las partículas y el tiempo, de la forma:

$$f_j(x_1, \dots, x_n; t) = C_j \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

donde, las cantidades C_j son constantes. Decimos entonces que las relaciones (3) son k ecuaciones de restricción *holónomas*. Cuando las restricciones no pueden ser escritas de esta forma, nos referimos a ellas como *no holónomas*.

Ejemplos de Restricciones holónomas.

- 1) Movimiento de una partícula restringida a desplazarse sobre una superficie dada (Figura 1). En este caso, la ecuación de restricción es la ecuación de la superficie:

$$f(x, y, z) = \text{constante} \quad (4)$$

Para cualquier par de valores (x, y) , la coordenada z queda determinada por la ecuación (4).

- 2) Movimiento de una partícula restringida una curva dada (cuenta en-sartada en un alambre). En este caso, el sistema tiene un grado de libertad: la distancia medida a lo largo de la curva desde un punto dado.

$$x = x(s) \quad y = y(s) \quad z = z(s) \quad (5)$$

donde (5) es la forma paramétrica de la curva y s es el arco.

Figura 2: Movimiento de una partícula restringido a una curva.

- 3) **Péndulo Compuesto.** En este dispositivo, el movimiento de las masas m_1 y m_2 está restringido a un plano ($z_1 = z_2 = 0$) (Figura 1.0.2). Las coordenadas cartesianas de posición de las partículas en el plano están restringidas por la condición que la longitud de cada péndulo es constante. Esto queda expresado por las siguientes relaciones:

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2 \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2 \quad (6)$$

donde, l_1 y l_2 corresponden al largo de cada cuerda.

La existencia de las relaciones (6) implica que el número de coordenadas independientes se reduce a dos; i.e, dos grados de libertad. Los ángulos θ_1 y θ_2 de la Figura 1.0.2 pueden ser elegidos como las dos coordenadas generalizadas.

Note que las ecuaciones de restricción pueden ser dependientes o independientes del tiempo. Por ejemplo, en el caso de la cuenta ensartada en un alambre la relación puede ser dependiente del tiempo si el alambre experimenta deformaciones cuya dependencia temporal es conocida.

Ejemplo de restricción no holónoma.

Consideremos una partícula que desliza sin roce sobre la superficie de una esfera de radio R , bajo la acción de la fuerza de gravedad terrestre. Mientras la partícula se mantiene en contacto con la esfera se cumple que $r = R$; donde r es el vector de posición de la partícula medido desde el centro de la esfera. Sin embargo, esta relación deja de ser válida a partir del instante en que la partícula pierde contacto con la superficie de la esfera. En otras palabras, la

Figura 3: Péndulo Compuesto

relación de restricción no puede ser escrita como una ecuación del tipo (3), válida para todo tiempo t .

1.0.3 Restricciones no integrables

Son relaciones de restricción no holónomas que solamente pueden ser expresadas en forma diferencial:

$$\sum_i h_i dx_i = 0 \quad (7)$$

donde las funciones h_i dependen, en general, de las coordenadas de las partículas, de sus velocidades y del tiempo. Veremos que este tipo de restricciones puede ser tratado adecuadamente por la mecánica lagrangeana.

1.0.4 Relación entre las coordenadas generalizadas y las coordenadas cartesianas.

Consideremos un sistema de N partículas sujetas a k ecuaciones de restricción holónomas. En otras palabras, se trata de un sistema de $3N - k$ grados de libertad. Consecuentemente, bastan $3N - k$ coordenadas generalizadas $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{n-k}$ para describir el sistema. Entonces,

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_{n-k}; t) \quad \text{donde } n \equiv 3N \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

Supongamos que las coordenadas generalizadas experimentan una variación infinitesimal ; entonces, se tiene que:

$$dx_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} dq_\sigma + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt \quad (9)$$

Dividiendo (9) por dt y tomando el límite cuando dt tiende a cero, se obtiene la componente $\dot{x}_i$ de la velocidad:

$$\dot{x}_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \dot{q}_\sigma + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \dot{x}_i(q_1, \dots, q_{n-k}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-k}; t) \quad (10)$$

Note que x_i en (8) sólo depende de las coordenadas generalizadas y del tiempo; luego las derivadas parciales $\partial x_i / \partial q_\sigma$ y $\partial x_i / \partial t$ en (10), no dependen de las velocidades generalizadas. Así, $\dot{x}_i$ depende linealmente de las velocidades generalizadas. Derivando (10) con respecto a $\dot{q}_\lambda$, se obtiene que:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\lambda} = \frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \quad (11)$$

Note que el estado dinámico de un sistema físico en un instante de tiempo dado queda determinado si se especifican simultáneamente las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas.

1.0.5 Desplazamientos Virtuales.

La noción de *desplazamiento virtual* es fundamental para entender las secciones que siguen. Se define como:

- i) Un desplazamiento *infinitesimal* de una coordenada,
- ii) que *respeto* las restricciones impuestas al sistema (ecuaciones de restricción y
- iii) es *instantáneo* ; i.e., mientras se lleva a cabo el sistema no evoluciona. Dicho de otra forma, el sistema permanece "congelado"; excepto por el desplazamiento virtual, que se realiza.

El desplazamiento virtual δx_i , de una coordenada cartesiana x_i , puede ser expresado con ayuda de (9) en función de los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas.

$$\delta x_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \quad (12)$$

Note que la condición (iii) implica que $\delta t = 0$

1.0.6 Principio de D'Alembert.

Este principio es una de las rutas posibles para llegar a las ecuaciones de Lagrange. Se enuncia así : *Las fuerzas de reacción (o de restricción) no realizan trabajo en un desplazamiento virtual.*

Dado que se trata de un *principio*, no es necesario probarlo. No obstante, resulta conveniente comprobar su validez analizando algunos casos particulares. Utilicemos para ello los ejemplos de restricciones holónomas presentados en la sección 1.0.2.

- i) En la Figura 1 se muestra que la fuerza de normal $\vec{N}$ (fuerza de restricción) es por definición perpendicular al plano y consecuentemente, perpendicular al desplazamiento. Lo mismo ocurre en el ejemplo de la partícula obligada a seguir la forma del alambre. En ambos casos $\delta W = \vec{N} \cdot \delta \vec{r} = 0$
- ii) Un caso más interesante ocurre en un péndulo compuesto, donde las fuerzas de restricción son las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$. Claramente, el único desplazamiento virtual de la masa m_1 (Figura 1.0.2), compatible con la restricción $l_1 = \text{constante}$, es tangente al arco de circunferencia de radio l_1 ; i.e.:

$$\delta \vec{s}_1 \cdot \vec{T}_1 = 0 \quad (13)$$

Por otra parte, cualquier desplazamiento virtual de m_2 se escribe como:

$$\delta \vec{s}_2 = \delta \vec{s}_1 + \delta \vec{s}_r \quad (14)$$

donde, $\delta \vec{s}_r$ es tangente al arco de circunferencia de radio l_2 centrado instantáneamente en la masa m_1 ; i.e., $\delta s_r \cdot \vec{T}_2 = 0$. Entonces, el trabajo total que realizan los desplazamientos virtuales es efectivamente nulo

y vemos que el principio de D'Alembert se verifica en este caso. En efecto,

$$\delta W = \delta \vec{s}_1 \cdot (\vec{T}_1 - \vec{T}_2) + \delta \vec{s}_2 \cdot \vec{T}_2 = \delta \vec{s}_r \cdot \vec{T}_2 = 0 \quad (15)$$

Consideremos las fuerzas que actúan sobre una partícula de un cierto sistema. De acuerdo a la segunda ley de Newton, se cumple que

$$\dot{p}_i = F_i + R_i \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

donde, F_i y R_i son las componentes cartesianas de la fuerza externa y de la fuerza de restricción que actúan sobre ella y $\dot{p}_i$ es la i -ésima componente de su momentum lineal. Multiplicando (16) por δx_i y sumando sobre el índice " i " se tiene que:

$$\sum_{i=1}^n (\dot{p}_i - F_i) \delta x_i = \sum_{i=1}^n R_i \delta x_i \quad (17)$$

El principio de D'Alembert asegura que el lado derecho de (17) es nulo; luego, esta ecuación se reduce a:

$$\sum_{i=1}^n (\dot{p}_i - F_i) \delta x_i = 0 \quad (18)$$

Note que de (18) *no se puede* inferir que $\dot{p}_i = F_i$, ya que los desplazamientos virtuales δx_i no son linealmente independientes debido a la existencia de ecuaciones de restricción. Lo interesante de la ecuación (18) es que las fuerzas de restricción no aparecen explícitamente.

1.0.7 Fuerza Generalizada.

Comencemos por notar que el trabajo virtual que realiza la componente F_i de la fuerza externa, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_i \delta x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\sigma=1}^{n-k} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \quad (19)$$

$$\delta W = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \left(\sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma \quad (20)$$

Definiendo la componente σ de la *fuerza generalizada* como:

$$Q_\sigma = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \quad (21)$$

la relación (20) se reescribe como:

$$\delta W = \sum_{\sigma=1}^{n-k} Q_\sigma \delta q_\sigma \quad (22)$$

Note que Q_σ puede ser evaluada a partir de (21) o alternatively, utilizando (22) y llevando a cabo un desplazamiento virtual de la dirección de la coordenada generalizada q_σ , mientras el resto de las coordenadas permanece fijo. Esto es posible, ya que las coordenadas generalizadas son funciones linealmente independientes.

1.0.8 Ecuaciones de Lagrange.

Retornando a la ecuación (18), reescribamos el primer término de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d \dot{x}_i}{dt} \delta x_i \quad (23)$$

pero,

$$\delta x_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \quad (24)$$

entonces, (23) toma la forma:

$$\sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d \dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \quad (25)$$

pero,

$$\frac{d \dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) \quad (26)$$

Reemplazando (26) en (25), se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) \quad (27)$$

Utilizando (11) es posible reescribir el primer término del lado derecho de (27) de la siguiente manera:

$$\sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) \delta q_\sigma \quad (28)$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\sigma} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) \delta q_\sigma \quad (29)$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \delta q_\sigma \quad (30)$$

donde, T es la energía cinética del sistema:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (31)$$

Consideremos ahora el segundo término del lado derecho en la ecuación (27). Probaremos la siguiente identidad:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial q_\sigma} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\sigma} \quad (32)$$

Para ello reescribiremos independientemente el lado izquierdo y el lado derecho de (32) y demostraremos que son iguales.

a) Evaluemos primero el lado izquierdo de (32):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) = \sum_{\lambda=1}^{n-k} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\lambda \partial q_\sigma} \dot{q}_\lambda + \frac{\partial^2 x_i}{\partial t \partial q_\lambda} \quad (33)$$

b) Reescribamos ahora el lado derecho de (32). Derivando con (10) con respecto a q_σ , se tiene que:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\sigma} = \sum_{\lambda=1}^{n-k} \frac{\partial}{\partial q_\sigma} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda \right) + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\sigma \partial t} \quad (34)$$

Note que las derivadas $\partial/\partial q_\sigma$ son derivadas parciales; es decir, todas las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas permanecen constantes durante la derivación, excepto por la coordenada q_σ . Entonces, (34) se reduce a:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\sigma} = \sum_{\lambda=1}^{n-k} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\sigma \partial q_\lambda} \dot{q}_\lambda + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\sigma \partial t} \quad (35)$$

Claramente, (35) es igual a (33).

Entonces, usando (32) el segundo término al lado derecho de (27) se escribe como:

$$- \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma = - \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \quad (36)$$

$$= - \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial q_\sigma} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) \delta q_\sigma = - \sum_{\sigma=1}^{n-k} \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \delta q_\sigma \quad (37)$$

Utilizando (37) y (30), la relación (27) se escribe como:

$$\sum_{i=1}^n \dot{p}_i \delta x_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \right) \delta q_\sigma \quad (38)$$

Con la ayuda de (38) y (22), la ecuación (18) adopta la forma:

$$\sum_{i=1}^n (\dot{p}_i - F_i) \delta x_i = \sum_{\sigma=1}^{n-k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - Q_\sigma \right) \delta q_\sigma = 0 \quad (39)$$

pero, los desplazamientos virtuales de las coordenadas generalizadas δq_σ son linealmente independientes; luego, la expresión entre paréntesis en (39) es idénticamente nula para cada valor del subíndice σ ; i.e.,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} - Q_\sigma = 0 \quad \sigma = 1, \dots, n-k \quad (40)$$

Este conjunto de ecuaciones se conoce con el nombre de *ecuaciones de Lagrange* y corresponden a las ecuaciones de movimiento del sistema expresadas en término de las coordenadas generalizadas.

1.0.9 Fuerzas Conservativas.

Un caso particularmente importante ocurre cuando todas la fuerzas externas que actúan sobre el sistema son conservativas. Eso significa que existe una función energía potencial $V = V(x_1, \dots, x_n)$ tal que:

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (41)$$

Figura 4: Movimiento de una cuenta de masa m que desliza sin roce sobre un anillo que rota con velocidad angular constante.

Entonces,

$$Q_\sigma = \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} = - \frac{\partial V}{\partial q_\sigma} \quad (42)$$

Note que la función potencial no depende de las velocidades generalizadas; luego, al reemplazar (42) en (40) se obtiene que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_\sigma} = 0 \quad (43)$$

Definición. Se define el *Lagrangiano* del sistema como la diferencia de las funciones T y V :

$$L \equiv T - V \quad (44)$$

entonces, las ecuaciones de Lagrange (40) toman la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = 0 \quad \sigma = 1, \dots, n - k \quad (45)$$

EJEMPLO.

Una partícula de masa m desliza sin roce sobre un anillo de radio a ; que rota con velocidad angular $\vec{\omega}$ (constante) en torno a un eje perpendicular al plano del anillo que pasa por un punto O ubicado en su periferia (Figura 1.0.9).

Se desea encontrar la ecuación de movimiento de la partícula.

La configuración del sistema queda definida especificando la posición del centro del anillo A con respecto a un sistema de coordenadas con origen en

O y el ángulo θ que forma la prolongación del vector $\vec{OA}$ con el vector de posición de la partícula con respecto al punto A .

Llamemos xy al plano en que rota el anillo, entonces $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$, y las coordenadas de la partícula con respecto al punto O son:

$$x = a \cos \omega t + a \cos (\omega t + \theta) \quad (46)$$

$$y = a \sin \omega t + a \sin (\omega t + \theta) \quad (47)$$

Para simplificar los cálculos restringiremos el estudio al caso donde las fuerza externas son nulas. Entonces, el lagrangeano del sistema se reduce a la energía cinética:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (48)$$

$$= \frac{m}{2} \left(a^2 \omega^2 + a^2 (\omega + \dot{\theta})^2 + 2a^2 \omega (\omega + \dot{\theta}) \cos \omega t \cos(\omega t + \theta) \right) \quad (49)$$

$$+ \frac{m}{2} \left(2a^2 \omega (\omega + \dot{\theta}) \sin \omega t \sin(\omega t + \theta) \right) \quad (50)$$

Pero,

$$\cos \omega t \cos(\omega t + \theta) + \sin \omega t \sin(\omega t + \theta) = \cos \theta \quad (51)$$

Entonces:

$$T = \frac{m}{2} \left(a^2 \omega^2 + a^2 (\omega + \dot{\theta})^2 + 2a^2 \omega (\omega + \dot{\theta}) \cos \theta \right) \quad (52)$$

La ecuación de movimiento para la coordenada generalizada θ es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad (53)$$

Utilizando (52)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2(\omega + \dot{\theta}) + ma^2 \omega \cos \theta \quad (54)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ma^2 \ddot{\theta} - ma^2 \omega \dot{\theta} \sin \theta \quad (55)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -a^2 m \omega (\omega + \dot{\theta}) \sin \theta \quad (56)$$

Figura 5: Péndulo sujeto a un soporte móvil

Reemplazando estos resultados en (53) se obtiene la siguiente ecuación de movimiento para la masa m :

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \quad (57)$$

EJERCICIO. Péndulo sujeto a un soporte móvil.

En la Figura 1.0.9 se muestra un sistema formado por un péndulo de masa m y largo l unido a un soporte de coordenadas (x_s, y_s) , cuya dependencia temporal es conocida.

- i) Encuentre la ecuación de movimiento de la masa m en función del ángulo θ , que el péndulo forma con la vertical.
- ii) Suponga que el soporte oscila con movimiento armónico simple de frecuencia ω en la dirección horizontal; i.e.:

$$x_s = x_0 \cos \omega t \quad y_s = 0 \quad (58)$$

Resuelva la ecuación de movimiento en la aproximación $\theta \ll 1$.

Conviene recalcar que una ventaja importante del método de Lagrange es la simplicidad con que se obtienen las ecuaciones de movimiento una vez que se eligen las coordenadas generalizadas y se construye el Lagrangeano. Es especialmente apropiado para tratar problemas complejos.

Note que las fuerzas de restricción están implícitas en este tratamiento. Una forma de obtener información explícita sobre ellas consiste en relajar la condición de restricción e introducir una nueva variable en la descripción del

sistema. Una vez que se han encontrado las ecuaciones de movimiento, se ocupa la condición de restricción. Entonces es posible obtener explícitamente el valor de la fuerza de restricción. Veamos con un ejemplo como opera este procedimiento.

Consideremos un péndulo simple formado por una masa m unida a un pivote O mediante una cuerda de longitud l . En coordenadas polares, la energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \quad (59)$$

donde, la referencia de energía potencial cero se eligió en la posición de la masa cuando $\theta = 0$.

Si utilizamos la ecuación de restricción $r = l = \text{constante}$ al comienzo, el problema se reduce estudiar un sistema con un grado de libertad representado por la coordenada generalizada θ .

La opción que seguiremos aquí es ignorar la ecuación de restricción y estudiar un sistema con dos grados de libertad, representados por las coordenadas generalizadas r y θ . Note sin embargo, que ahora no disponemos de un lagrangeano ya que las fuerzas de restricción ahora están presentes explícitamente y en general no son conservativas; en consecuencia, debemos usar la formulación (40), en función de la energía cinética y las fuerzas generalizadas. Entonces, las ecuaciones del movimiento son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r \quad (60)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \quad (61)$$

Utilizando (59), la ecuación en la variable r se escribe como:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = Q_r \quad (62)$$

donde Q_r se puede obtener evaluando el trabajo virtual que realizan todas las fuerzas en un desplazamiento virtual de la coordenada generalizada r :

$$Q_r \delta r = -T \delta r + mg \cos \theta \delta r \quad (63)$$

donde T es la tensión en la cuerda y $mg \cos \theta$ la componente de la fuerza de gravedad en la dirección del vector unitario $\hat{r}$. Utilizando ahora la condición

de restricción $r = l = \text{constante}$, se tiene que $\ddot{r} = 0$ en (62). Reemplazando Q_r obtenido de (63) en esa misma ecuación, se tiene que:

$$T = mg \cos \theta + mr\dot{\theta}^2 \quad (64)$$

El valor de $\dot{\theta}$ se obtiene de la ecuación de movimiento para la coordenada generalizada θ

1 Cálculo variacional.

1.0.1 Introducción

Uno de los problemas más antiguos en física matemática consiste en minimizar expresiones que no sólo dependen de una variable continua, como es la situación usual, sino de una función de esa variable y sus derivadas. En este caso, el problema consiste en encontrar la dependencia funcional completa de una función $y(x)$, tal que minimiza el valor de una integral entre límites definidos que depende de esa función y sus derivadas:

$$I = \int_{x_A}^{x_B} \phi(x, y(x), \dot{y}(x), \dots) dx \quad (1)$$

Este tipo de problemas fueron muy importantes en el desarrollo de la física clásica durante los siglos XVIII y XIX y en el desarrollo de la física cuántica durante este siglo.

En los párrafos que siguen mencionaremos algunos problemas del cálculo variacional que han tenido connotación histórica:

- 1) Dados dos puntos en un plano, se desea encontrar la curva plana de longitud mínima que los conecta. Sean (x_A, y_A) y (x_B, y_B) las coordenadas de los puntos en el plano xy . Supongamos que $x_A < x_B$ y llamemos $y(x)$ a la curva plana que los conecta. Matemáticamente, el problema consiste de encontrar la forma de la función $y(x)$ que minimiza la integral:

$$I = \int_{x_A}^{x_B} ds = \int_{x_A}^{x_B} (dx^2 + dy^2)^{1/2} = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2)$$

sometida a la condición de borde:

$$y_A = y(x_A) \quad y_B = y(x_B) \quad (3)$$

- 2) En 1696, Johann Bernoulli, de la Universidad de Basilea propuso el siguiente problema: "Dados dos puntos A y B en un plano vertical, se desea encontrar el camino AMB que debe seguir una partícula que parte desde el reposo en A para que, sometida a la fuerza de gravedad terrestre, demore el mínimo de tiempo en llegar al punto B (Figura 1).

Figura 1: Trayectoria AMB que une a los puntos A y B

La solución, encontrada por el propio Bernoulli, es conocida con el nombre de *Braquistócrona*, del griego *braquistos* = *el más corto* y *chronos* = *tiempo*. En matemática recibe el nombre de *cicloide*.

Elijamos el origen de coordenadas en A , y supongamos que la partícula parte desde el reposo. Entonces, si no existe fricción a lo largo de la trayectoria, la energía mecánica de la partícula se conserva y podemos escribir que

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad (4)$$

El tiempo que demora la partícula en viajar de A hasta B siguiendo la curva $y = y(x)$ es:

$$t_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{ds}{v} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{(1 + \dot{y}^2)^{1/2}}{(2gy)^{1/2}} dx \quad (5)$$

El problema consiste en encontrar la función $y(x)$ que minimiza el tiempo t_{AB} , con la condición que $y(x_A) = y_A$ e $y(x_B) = y_B$.

- 3) Un tercer problema dice relación con la búsqueda de la superficie de revolución de área mínima que pasa por dos puntos dados (x_A, y_A) y (x_B, y_B) . Supongamos que la curva $y(x)$ se hace rotar alrededor del eje x como se ilustra en la Figura 1.0.1. En el diagrama se ha supuesto que $y_A > 0$ e $y_B > 0$. La integral que se desea minimizar es:

$$I = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} y ds = 2\pi \int_{x_A}^{x_B} y(1 + \dot{y}^2)^{1/2} dx \quad (6)$$

Figura 2: Superficie de revolución

con la condición $y(x_A) = y_A$ e $y(x_B) = y_B$

Estos problemas forman parte de una clase más general, cuya finalidad es *encontrar la función $y(x)$ tal que, sometida a las restricciones*

$$y(x_A) = y_A \quad y(x_B) = y_B \quad (7)$$

asegura que la siguiente integral adopta un valor extremo:

$$I = \int_{x_A}^{x_B} \phi(x, y, \dot{y}) dx \quad (8)$$

donde, ϕ es una función de la variable x , de la función $y(x)$ y de su primera derivada $\dot{y}(x)$.

1.0.2 Ecuación de Euler-Lagrange

En esta sección obtendremos la ecuación diferencial que satisface la función $y(x)$ que, reemplazada en el integrando de (8), asegura que esta integral adopte un valor extremo. Supondremos que la función ϕ es diferenciable hasta la segunda derivada en sus argumentos.

Consideremos la familia de *curvas de comparación* $y(x, \epsilon)$ dependientes del parámetro ϵ y definidas de la siguiente manera:

$$\bar{y}(x, \epsilon) = y(x) + \epsilon \eta(x) \quad (9)$$

donde $y(x)$ es la solución buscada y la función $\eta(x)$ es una función arbitraria. La familia así definida tiene las siguientes características: i)

Figura 3: La función $y(x)$ minimiza la integral I

$$\bar{y}(x_A, \epsilon) = y_A \quad (10)$$

$$\bar{y}(x_B, \epsilon) = y_B \quad (11)$$

Estas relaciones son válidas para todo valor de ϵ ; es decir, todas las curvas de la familia comienzan y terminan en los mismos puntos. Estas condiciones implican que:

$$\eta(x_A) = \eta(x_B) = 0 \quad (12)$$

ii) Utilizando la definición (9) se verifica que:

$$\bar{y}(x, 0) = y(x) \quad (13)$$

$$\dot{\bar{y}}(x, 0) = \dot{y}(x) \quad (14)$$

donde, $y(x)$ es la solución buscada.

iii) Las funciones $\bar{y}(x, \epsilon)$ y sus derivadas hasta el segundo orden, son funciones continuas de x y del parámetro ϵ .

Evaluemos la integral (8) sobre una curva cualquiera de la familia $\bar{y}(x, \epsilon)$ (Figura 1.0.2):

$$I(\epsilon) = \int_{x_A}^{x_B} \phi(x, \bar{y}, \dot{\bar{y}}) dx \quad (15)$$

Las relaciones (13) y (14) aseguran que la integral (15) adopta el valor extremo cuando $\epsilon = 0$. Matemáticamente, esta condición se expresa como:

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad (16)$$

Entonces, diferenciando (15) con respecto a ϵ se tiene que:

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_A}^{x_B} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{d\epsilon} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\bar{y}}} \frac{d\dot{\bar{y}}}{d\epsilon} \right\} dx \quad (17)$$

pero,

$$\frac{d\dot{\bar{y}}}{d\epsilon} = \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{d\bar{y}}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\bar{y}}{d\epsilon} \right) \quad (18)$$

utilizando (18) en (17) se obtiene que

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_A}^{x_B} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{d\epsilon} + \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\bar{y}}} \frac{d}{dx} \frac{d\bar{y}}{d\epsilon} \right\} dx \quad (19)$$

Integrando por partes el segundo término de (19):

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\bar{y}}} \frac{d\bar{y}}{d\epsilon} \right]_{x_A}^{x_B} + \int_{x_A}^{x_B} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{d\epsilon} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \dot{\bar{y}}} \right) \frac{d\bar{y}}{d\epsilon} \right\} dx \quad (20)$$

Note que:

$$\frac{d\bar{y}}{d\epsilon} = \eta(x) \quad (21)$$

Además, (12) asegura que el primer término en (20) es nulo.

Entonces, usando (21) en (20) y evaluando la expresión resultante en $\epsilon = 0$, se tiene que:

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_A}^{x_B} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\bar{y}}} \right\} \eta(x) dx = 0 \quad (22)$$

donde, hemos utilizado (16).

Dado que las funciones $\eta(x)$ son arbitrarias, de (22) se concluye que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{\bar{y}}} = 0 \quad (23)$$

Esta ecuación fue derivada por Leonhard Euler en 1744. Se la conoce con el nombre de ecuación de Euler-Lagrange debido a su importancia en la formulación de Mecánica Clásica hecha por Joseph Louis Lagrange.

La relación (23) es una ecuación diferencial de segundo orden para la función $y(x)$. Una vez encontrada, estamos seguros que al reemplazarla en el integrando de (8) dicha integral tomará un valor extremo (máximo, mínimo

o punto de inflexión). En general, no resulta simple probar de que tipo de extremo se trata; sin embargo, eso no es esencial para el desarrollo de la teoría.

Caso particular importante.

Existen muchas situaciones de interés donde la función ϕ en el integrando de (8) *no depende explícitamente* de la variable de integración x . En esos casos, la función $y(x)$ satisface, además de la ecuación de Euler-Lagrange, una ecuación diferencial de primer orden. Esto simplifica notablemente el cálculo de $y(x)$, ya que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{d}{dx} \left(\dot{y} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} - \phi \right) = 0 \quad (24)$$

En efecto, basta llevar a cabo la derivación indicada para demostrar la validez del resultado:

$$\frac{\partial \dot{y}}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} + \dot{y} \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x}}_{x=0} = 0 \quad (25)$$

El primer término en (25) se cancela con el cuarto y el último es idénticamente nulo pues ϕ no depende explícitamente de x . Entonces, esta (25) se reduce a:

$$\dot{y} \underbrace{\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}_{x=0} = 0 \quad (26)$$

que es efectivamente igual a cero, pues el término entre paréntesis es la ecuación de Euler-Lagrange para $y(x)$. Entonces, de (24) se concluye que

$$\dot{y} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}} - \phi = \text{constante} \quad (27)$$

La ecuación (27) es una ecuación diferencial de primer orden en $y(x)$. (Es una primera integral de la ecuación original de Euler-Lagrange).

1.0.3 Generalización para el caso en que el funcional ϕ depende de n funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Ahora se trata de encontrar las funciones $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ que aseguran que la integral I escrita a continuación adopta un valor extremo:

$$I = \int_{x_A}^{x_B} \phi(y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dot{y}_1(x), \dot{y}_2(x), \dots, \dot{y}_n(x); x) dx \quad (28)$$

sometida a las condiciones de borde:

$$y_1(x_A) = y_{1A} ; \quad y_2(x_A) = y_{2A} ; \quad \dots \quad y_n(x_A) = y_{nA} \quad (29)$$

Llevando a cabo un procedimiento variacional similar al descrito para minimizar la integral (8) que depende de x , $y(x)$ e $\dot{y}(x)$, se obtiene cada una de las funciones $y_i(x)$, $i = 1, n$, satisface la ecuación de Euler-Lagrange; i.e.:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}_i} = 0 \quad (30)$$

Análogamente, cuando el integrando ϕ no depende explícitamente de la variable x se cumple que:

$$\sum_{i=1}^n \dot{y}_i \frac{\partial \phi}{\partial \dot{y}_i} - \phi = \text{constante} \quad (31)$$

EJEMPLO 1. Curva más corta entre dos puntos en un plano.

Se trata de minimizar el funcional:

$$I = \int_{x_A}^{x_B} ds = \int_{x_A}^{x_B} (1 + \dot{y}^2)^{1/2} dx \quad (32)$$

donde, $y(x)$ es la curva continua que une los puntos A y B . En este caso, el integrando en (32) no depende explícitamente de x ; luego, se puede aplicar directamente (27) con $\phi = (1 + \dot{y}^2)^{1/2}$

$$\begin{aligned} \dot{y}(1 + \dot{y}^2)^{-1/2} \dot{y} - (1 + \dot{y}^2)^{1/2} &= C = \text{constante} \\ -\frac{1}{(1 + \dot{y}^2)^{1/2}} &= C \end{aligned} \quad (33)$$

Elevando al cuadrado (33) y reordenando los términos se tiene que

$$\dot{y}^2 = \frac{(1 - C^2)}{C^2} \equiv A^2 \quad (34)$$

Integrando (34) se tiene que

$$y = A x + h \quad (35)$$

Claramente, se trata de una recta. Las constantes A y h se calculan a partir de las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} y_A &= A x_A + h \\ y_B &= A x_B + h \end{aligned} \quad (36)$$

EJEMPLO 2. La Braquistócrona

En este ejemplo se busca la curva $y(x)$ que debe seguir una partícula inmersa en un campo gravitacional uniforme de manera que demore el mínimo de tiempo en viajar entre los puntos (x_A, y_A) y (x_B, y_B) . En otras palabras, se trata de encontrar el valor extremo de la integral (5)

$$t_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{ds}{v} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{(1 + \dot{y}^2)^{1/2}}{(2gy)^{1/2}} dx \quad (37)$$

Al igual que el ejemplo anterior, el integrando en (37) no depende explícitamente de la variable x . En efecto,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2g}} \left(\frac{(1 + \dot{y}^2)}{y} \right)^{1/2} \quad (38)$$

Entonces, utilizando (27) se tiene que

$$-\frac{1}{(1 + \dot{y}^2)^{1/2}} \frac{1}{y^{1/2}} = (2g)^{1/2} \equiv C' \quad (39)$$

Elevando al cuadrado (39) y definiendo $a \equiv 1/C'^2$, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \dot{y} = \left(\frac{2a - y}{y} \right)^{1/2} \quad (40)$$

Integrando (40) se tiene que:

$$\int dx = \int \frac{y^{1/2} dy}{(2a - y)^{1/2}} + x_0 \quad (41)$$

donde x_0 es una constante de integración. La integral (41) se resuelve utilizando el siguiente cambio de variable:

$$y = a(1 - \cos \theta) \quad (42)$$

Figura 4: Cicloide

Entonces, (41) adopta la forma

$$x - x_0 = 2a \int \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = a(\theta - \sin \theta) \quad (43)$$

Las ecuaciones (42) y (43) describen un *cicloide*; i.e. una curva generada por la trayectoria de un punto fijo en el borde de un círculo de radio a que rueda sin resbalar en contacto con la parte inferior del eje x positivo (Figura 1.0.3). La solución (43) fue publicada por Joseph Bernoulli en 1697.

EJERCICIO. Huygens había descubierto años antes que una masa puntual que oscila sin roce sobre un cicloide vertical bajo la acción de la gravedad terrestre, lo hace con un período que es independiente de la amplitud del movimiento. Demuestre este resultado.

1.1 Principio de Hamilton

Resulta bastante evidente que las ecuaciones de Euler-Lagrange (23) y (30) obtenidas utilizando cálculo variacional, tienen la misma forma de las ecuaciones de Lagrange de Mecánica Clásica, obtenidas utilizando el Principio de D'Alembert. Esa similitud hace pensar que las ecuaciones de la Mecánica Clásica pueden ser obtenidas de un principio variacional. En efecto, William R. Hamilton enunció este principio de la siguiente manera: "La trayectoria que sigue un sistema físico cualquiera es aquella que minimiza la integral de acción, definida como

$$I = \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}; t) dt \quad (44)$$

donde, L es una función escalar llamada *Lagrangeano*, que depende de las coordenadas generalizadas, las velocidades generalizadas y del tiempo. La exigencia que la integral (44) adopte un valor extremo sobre la trayectoria del sistema, se expresa escribiendo: $\delta I = 0$, sometida a las condiciones de borde $\delta q(t_A) = \delta q(t_B) = 0$. La solución a este problema ya fue encontrada en (21) y dice la trayectoria buscada es aquella que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (45)$$

Note que el principio de Hamilton supone la existencia de la función Lagrangeano, pero no provee un procedimiento para encontrarla. En el caso de sistemas conservativos el Lagrangeano es igual a la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial; sin embargo, en otros casos la forma de esta función no es evidente.

Cuando el sistema tiene varios grados de libertad, existe una ecuación de Lagrange para cada uno de ellos. Así, análogamente a (30) se cumple que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (46)$$

donde $q_1, q_2, \dots, q_n$ son coordenadas generalizadas.

1.2 Método de los multiplicadores de Lagrange

. A menudo es necesario calcular explícitamente las fuerzas de restricción presentes en un determinado problema (tensiones, fuerzas normales, fuerzas de roce, etc). Esto se puede lograr en forma elegante permitiendo que el Lagrangeano del sistema permanezca expresado en función de un número de variables superior al número de grados de libertad del sistema e incorporando explícitamente las relaciones de restricción en el problema variacional mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

Recordemos que el principio de Hamilton asegura que un sistema de n grados de libertad, evoluciona en el tiempo de manera que sus coordenadas generalizadas $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ son funciones del tiempo tales que minimizan la integral de acción:

$$I = \int_{t_A}^{t_B} L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n; t) dt \quad (47)$$

sujeta a las condiciones de borde

$$\begin{aligned} \delta q_1(t_A) = \delta q_2(t_A) \dots = \delta q_n(t_A) &= 0 \\ \delta q_1(t_B) = \delta q_2(t_B) \dots = \delta q_n(t_B) &= 0 \end{aligned}$$

La exigencia que la integral I tome un valor extremo sobre la trayectoria que realmente sigue el sistema se expresa escribiendo $\delta I = 0$. Siguiendo un

procedimiento idéntico al expuesto en las secciones previas, se debe cumplir que:

$$\delta I = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{\sigma=1}^n \delta q_{\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{\sigma}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \right) dt = 0 \quad (48)$$

En el análisis de (48), es importante distinguir dos casos:

Caso I. Las n coordenadas $q_1, q_2, \dots, q_n$ son linealmente independientes. Eso significa que las variaciones δq_{σ} en (48) son todas independientes y consecuentemente se concluye que el término entre paréntesis es nulo para cada coordenada q_{σ} ; i.e., reproducimos el resultado escrito en las secciones anteriores:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma}} - \frac{\partial L}{\partial q_{\sigma}} = 0 \quad (49)$$

Caso II. Algunas de las coordenadas q_{σ} son linealmente dependientes debido a la existencia de relaciones de restricción entre ellas. Supongamos que existen k relaciones de restricción holónomas; i.e, k relaciones del tipo:

$$f_j(q_1, q_2, \dots, q_n) = C_j \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (50)$$

En este caso no es posible concluir en (48) que el integrando es nulo para cada valor de σ , ya que algunas de las variaciones δq_{σ} son linealmente dependientes. El procedimiento ideado por Lagrange para tratar este caso consiste en llevar a cabo variaciones infinitesimales arbitrarias de las variables $q_1, q_2, \dots, q_n$ en (50):

$$\delta f_j = \sum_{\sigma=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial q_{\sigma}} \delta q_{\sigma} = 0 \quad (51)$$

En la etapa siguiente, se multiplica (51) por una función arbitraria $\lambda_j(q_1, \dots, q_n; t)$, se suma sobre el subíndice j y finalmente se integra toda la expresión entre los límites t_A y t_B :

$$\int_{t_A}^{t_B} \sum_{j=1}^k \sum_{\sigma=1}^n \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_{\sigma}} \delta q_{\sigma} dt = 0 \quad (52)$$

Adicionando (52) a (48) se obtiene:

$$\delta I = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{\sigma=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_{\sigma}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma}} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_{\sigma}} \right] \delta q_{\sigma} dt = 0 \quad (53)$$

Rotulemos las coordenadas de manera que las primeras $n - k$ son linealmente independientes y las $n - k$ restantes son dependientes. Entonces, las k funciones λ_j (multiplicadores de Lagrange) se eligen de manera de asegurar que los coeficientes de las variaciones δq_σ en (53) se anulen para cada uno de los subíndices $\sigma = (n - k + 1), (n - k + 2), \dots, n$. Por otra parte, los coeficientes de la variaciones δq_σ en el integrando de (53) se anulan automáticamente, pues las variaciones δq_σ con $\sigma = 1, \dots, n - k$ son linealmente independientes. Se concluye entonces que el coeficiente de las variaciones δq_σ en el integrando de (53) es nulo para todo σ . Es decir:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma} \quad \sigma = 1, 2, \dots, n \quad (54)$$

Note que (54) provee n ecuaciones, que junto con las k ecuaciones de restricción (50) determinan las $n + k$ funciones: $q_1, \dots, q_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$.

El significado físico de los multiplicadores de Lagrange en el caso de sistemas conservativos se puede obtener en forma simple. En este caso el Lagrangeano del sistema se puede escribir como $L = T - V$. Entonces, (54) adopta la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = -\frac{\partial V}{\partial q_\sigma} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma \quad \sigma = 1, 2, \dots, n \quad (55)$$

La ecuación (55) muestra que la fuerza generaliza Q_σ consta de dos términos: uno que proviene de las fuerzas conservativas y un segundo término que corresponde a la componente σ de las fuerzas de restricción ; es decir, la suma de las componentes σ de las fuerzas que es necesario aplicar para hacer respetar las restricciones (50). Claramente, las fuerzas de restricción tienen una relación directa con los multiplicadores de Lagrange.

EJEMPLO. La Máquina de Atwood.

Este es un problema muy conocido en cursos introductorios de física y aquí servirá para ilustrar las ideas recién expuestas. En la Figura 1.2 se indican las coordenadas x_1 y x_2 de las masas m_1 y m_2 medidas desde la línea horizontal que pasa por el centro de la polea. Dado que la cuerda es inextensible, se cumple que $x_1 + x_2 = l = \text{constante}$. Esta relación de restricción reduce a uno el número de grados de libertad; sin embargo, optaremos por tratar ambas coordenadas como si fueran independientes e introduciremos un multiplicador de lagrange asociado a la relación de restricción:

Figura 5: Máquina de Atwood

$$f = x_1 + x_2 = l \quad (56)$$

Entonces, el Lagrangeano del sistema se escribe como:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) + m_1 g x_1 + m_2 g x_2 \quad (57)$$

donde, la referencia de potencial cero se eligió en la línea horizontal que pasa por el centro de polea.

Utilizando las ecuaciones (54) se tiene que:

$$m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \quad (58)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - m_2 g = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \quad (59)$$

Utilizando la relación de restricción se prueba que $\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$; entonces, restando ambas ecuaciones se obtiene que:

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad (60)$$

$$\lambda = -\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (61)$$

De (55) vemos que λ corresponde a la parte no conservativa de la fuerza generalizada Q_1 :

$$Q_1 = m_1 g + \lambda \quad (62)$$

Figura 6: Cilindro de radio R_2 que rueda sin resbalar sobre un cilindro de radio R_1 que gira sobre un eje fijo que pasa por su centro.

Considerando que sobre la masa m_1 actúan las fuerzas m_1g y la tensión $\vec{T} = -T \hat{x}_1$, se deduce de inmediato que $\lambda = -T$. Nota que la fuerza de restricción actúa en dirección opuesta a T de manera de asegurar que el largo de la cuerda permanezca constante.

EJEMPLO. Cilindro que rueda sin resbalar sobre otro cilindro que rota sobre un eje fijo.

Consideremos un cilindro de radio R_2 y masa m que rueda sin resbalar sobre un cilindro de radio R_1 que puede girar sobre un eje fijo que coincide con su eje de simetría axial O (Figura 1.2). Se desea encontrar la ecuación de movimiento del cilindro de radio R_2 . La configuración del cilindro que rueda está dada por el ángulo θ_1 que forma el vector OO' que une el centro de los cilindros y por el ángulo θ_2 que indica la rotación del cilindro de radio R_2 con respecto a su centro de masa. En la Figura 1.2 se indica el arco recorrido por ambos cilindros durante el movimiento. La condición que los cilindros ruedan sin resbalar se escribe como:

$$(\theta_2 - \theta_1) R_2 = \theta_1 R_1 \quad (63)$$

Reordenando los términos y definiendo la función $f_2(\theta_1, \theta_2)$, se tiene que:

$$f_2(\theta_1, \theta_2) \equiv \theta_1 (R_2 + R_2) - \theta_2 R_2 = 0 \quad (64)$$

Además, se debe satisfacer la condición

$$f_1(r) \equiv r = R_1 + R_2 = \text{constante} \quad (65)$$

que asegura que los cilindros permanecen en contacto durante todo el movimiento.

La energía cinética del cilindro de radio R_2 es igual a la energía cinética de rotación del cilindro alrededor de su eje de simetría axial que pasa por su centro de masa, más la energía cinética translacional.

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{4}m R_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (66)$$

Note que aún cuando la configuración está completamente definida por dos coordenadas generalizadas (θ_1 y θ_2), utilizaremos además la coordenada r cuyo valor está restringido por la condición que ambos cilindros están permanentemente en contacto (ecuación (65)).

Eligiendo la referencia de potencial igual a cero sobre la recta horizontal que pasa por el centro del cilindro de radio R_1 , se tiene que la energía potencial gravitatoria es:

$$V = m g r \cos \theta_1 \quad (67)$$

Entonces, el lagrangeano del sistema se escribe como :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{4}m R_2^2 \dot{\theta}_2^2 - m g r \cos \theta_1 \quad (68)$$

Las ecuaciones de Lagrange para las coordenadas r , θ_1 y θ_2 resultan ser:

a) r :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial r} \quad (69)$$

$$m \ddot{r} - m r \dot{\theta}_1^2 + m g \cos \theta_1 = \lambda_1 \quad (70)$$

b) θ_1 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial \theta_1} \quad (71)$$

$$\frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\theta}_1) - m g r \sin \theta_1 = \lambda_2 (R_1 + R_2) \quad (72)$$

c) θ_2 :

$$\frac{1}{2}m R_2^2 \ddot{\theta}_2 = -\lambda_2 R_2 \quad (73)$$

Utilizando (65) tenemos que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Entonces, (70) se reduce a:

$$-m (R_1 + R_2) \dot{\theta}_1^2 + m g \cos \theta_1 = \lambda_1 \quad (74)$$

Despejando λ_2 de (73) y reemplazando en (72) se tiene que:

$$m (R_1 + R_2) \ddot{\theta}_1 - m g \sin \theta_1 = -\frac{1}{2} m R_2 \ddot{\theta}_2 \quad (75)$$

Derivando (64) dos veces con respecto al tiempo:

$$(R_1 + R_2) \ddot{\theta}_1 = R_2 \ddot{\theta}_2 \quad (76)$$

Reemplazando (76) en (75) se obtiene una ecuación diferencial para θ_1 :

$$\frac{3}{2}(R_1 + R_2) \ddot{\theta}_1 - m g \sin \theta_1 = 0 \quad (77)$$

Note que esta ecuación también se obtiene si al comienzo se utilizan las relaciones de restricción para expresar el Lagrangeano sólo en función de la coordenada θ_1 . La elección de escribir el lagrangeano en función de tres coordenadas generalizadas nos permite obtener directamente información acerca de las fuerzas de restricción.

Multiplicando (77) por $\dot{\theta}_1$ se puede escribir como:

$$\frac{3}{4}(R_1 + R_2) \frac{d}{dt} \dot{\theta}_1^2 + m g \frac{d \cos \theta_1}{dt} = 0 \quad (78)$$

Integrando esta ecuación con las condiciones iniciales $\dot{\theta}_1 = 0$ en $\theta_1 = 0$, se obtiene que:

$$(R_1 + R_2) \dot{\theta}_1^2 = \frac{4}{3} m g (1 - \cos \theta_1) \quad (79)$$

En principio esta ecuación puede ser integrada y obtener $\theta_1 = \theta_1(t)$; pero nuestro interés va en otra dirección en este momento. Volvamos a la ecuación (74). Allí, el multiplicador de lagrange λ_1 corresponde a la fuerza normal que el cilindro de radio R_1 ejerce sobre el cilindro de radio R_2 . Entonces, reemplazando el valor de $\dot{\theta}_1^2$ obtenido en (79) en (74), se obtiene la fuerza normal $N(\theta_1)$:

$$\lambda_1 = N(\theta_1) = \frac{m g}{3} (7 \cos \theta_1 - 4) \quad (80)$$

Note que $N(\theta_1)$ se anula en el instante en que el cilindro de radio R_2 se despega del cilindro de radio R_1 ; ésto ocurre para un ángulo θ_1° tal que:

$$\cos \theta_1^\circ = \frac{4}{7} \quad \text{es decir} \quad \theta_1^\circ = 55.15^\circ \quad (81)$$

Valores negativos de la normal pueden existir si ambos cilindros se mantienen unidos por una barra rígida sin masa, de manera que permanentemente se cumpla que $R_1 + R_2 = r = \text{constante}$. Cuando la normal se hace negativa equivale a decir que la barra está ejerciendo una tensión para evitar que el cilindro se despegue. Note que el ángulo θ_1° es independiente de los radios R_1 y R_2 .

1.3 Momentum generalizado

Definición. Momentum generalizado o momentum canónico p_σ asociado a la coordenada generalizada q_σ

$$p_\sigma \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\sigma} \quad (82)$$

Con esta definición, la ecuación de lagrange para la coordenada q_σ adopta la forma

$$\dot{p}_\sigma = \frac{\partial L}{\partial q_\sigma} \quad (83)$$

Consecuentemente, cuando el Lagrangeano del sistema *no depende explícitamente* de la coordenada q_σ , el momentum generalizado p_σ es *constante*. Decimos entonces que la coordenada q_σ es una coordenada *cíclica* y que p_σ es una *constante de movimiento*.

1.4 Principios de simetría y cantidades conservadas.

La noción de simetría juega un papel fundamental en todas las ramas de la física, desde el mundo macroscópico hasta el mundo microscópico, donde la mecánica de Newton deja de ser válida. En esta sección, analizaremos las propiedades de simetría del Lagrangeano de un sistema clásico. A modo de ejemplo, consideremos el lagrangeano de una partícula de masa m que se mueve en un potencial que depende sólo de la coordenada z :

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(z) \quad (84)$$

Esta función no depende explícitamente de la coordenada x ni tampoco de y ; consecuentemente, los momentum generalizados p_x y p_y son constantes de movimiento; i.e.:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} = \text{constante} \quad (85)$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} = \text{constante} \quad (86)$$

Note que el lagrangeano (84) permanece inalterado cuando cambiamos $x \rightarrow x' = x + a$ e $y \rightarrow y' = y + b$ donde a y b son desplazamientos arbitrarios. Decimos entonces que el lagrangeano tiene la propiedad de simetría de ser *invariante* bajo translaciones en esas dos direcciones. Esta simetría se refleja en una ley de conservación: *las componentes p_x y p_y del momentum lineal se conservan en el tiempo.*

Como segundo ejemplo consideremos el movimiento de una partícula de masa m en un campo de fuerzas centrales que derivan del potencial $V(r)$. Esto significa que el movimiento se mantendrá en el plano definido por el vector de posición y la velocidad inicial de la partícula. En ese plano el lagrangeano de la partícula tiene la forma

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r) \quad (87)$$

Claramente, el lagrangeano en (87) no depende explícitamente del ángulo ϕ . En otras palabras, esta función permanece inalterada cuando hacemos la transformación $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \alpha$, donde α es un ángulo arbitrario. En este caso decimos que el lagrangeano (87) es invariante bajo rotaciones en el ángulo ϕ . Esta propiedad de simetría se manifiesta en la conservación del momentum generalizado p_ϕ ; en efecto, la ecuación de lagrange para la variable ϕ se escribe como:

$$\dot{p}_\phi = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\phi}) = 0 \quad (88)$$

Note que $p_\phi = m r^2 \dot{\phi}$ es el momentum angular l de la partícula. Utilizando este resultado en la ecuación de lagrange para la variable r , se obtiene la conocida ecuación diferencial para $r = r(t)$:

$$m \ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (89)$$

1.5 Ecuaciones de Hamilton

La formulación de las leyes de mecánica clásica basada en el Lagrangeano y las ecuaciones de Lagrange que se derivan de él, presupone que el estado mecánico del sistema queda perfectamente definido especificando simultáneamente las coordenadas generalizadas y las velocidades generalizadas. Sin embargo, ésta no es la única forma de proceder. En efecto, en ciertos problemas tiene ventaja utilizar como variables independientes las coordenadas generalizadas y los momenta generalizados.

El paso de un conjunto de variables independientes al otro se realiza mediante un tipo de transformación que los matemáticos conocen con el nombre de *transformación de Legendre*.

Definición.. La función *Hamiltoniano* del sistema se define como:

$$H = \sum_{\sigma} p_{\sigma} \dot{q}_{\sigma} - L \quad (90)$$

La diferencial total de H se escribe como:

$$dH = \sum_{\sigma} (dp_{\sigma} \dot{q}_{\sigma} + p_{\sigma} d\dot{q}_{\sigma}) - \frac{\partial L}{\partial q_{\sigma}} dq_{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma}} d\dot{q}_{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (91)$$

Pero, utilizando la definición de momentum generalizado se demuestra que los dos términos proporcionales a $d\dot{q}_{\sigma}$ se cancelan mutuamente. Además, la ecuación de Lagrange muestra que el tercer término en (91) es igual a $\dot{p}_{\sigma}$. Entonces, (91) se reduce a:

$$dH = \sum_{\sigma} \dot{q}_{\sigma} dp_{\sigma} - \dot{p}_{\sigma} dq_{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (92)$$

Esta relación muestra que la función H depende de las variables independientes q_{σ} y p_{σ} . Diferenciando explícitamente la función $H = H(q_{\sigma}, p_{\sigma}; t)$ se tiene que:

$$dH = \sum_{\sigma} \frac{\partial H}{\partial q_{\sigma}} dq_{\sigma} + \frac{\partial H}{\partial p_{\sigma}} dp_{\sigma} + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad (93)$$

Comparando los coeficientes de las diferenciales en (92) y (93) se concluye que:

$$\frac{\partial H}{\partial q_{\sigma}} = -\dot{p}_{\sigma} \quad \frac{\partial H}{\partial p_{\sigma}} = \dot{q}_{\sigma} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (94)$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de *Ecuaciones de Hamilton* o *Ecuaciones canónicas*. Forman un conjunto de $2n$ ecuaciones de primer orden en las variables q_σ y p_σ . En esta formulación las variables q_σ y p_σ tienen la misma importancia, tal como se manifiesta en la simetría de las ecuaciones.

1.5.1 Propiedades del Hamiltoniano

a) *El Hamiltoniano se conserva cuando el Lagrangeano del sistema no depende explícitamente del tiempo* Derivemos (91) con respecto al tiempo:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{\sigma} (\dot{p}_{\sigma} \dot{q}_{\sigma} + p_{\sigma} \ddot{q}_{\sigma}) - \frac{\partial L}{\partial q_{\sigma}} \dot{q}_{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \ddot{q}_{\sigma} - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (95)$$

Ocupando que $p_{\sigma} = \partial L / \partial \dot{q}_{\sigma}$ se demuestra que el segundo término en (95) se cancela con el cuarto. La ecuación de Lagrange $\dot{p}_{\sigma} = \partial L / \partial q_{\sigma}$ asegura que el primer término se cancela con el tercero. Entonces, (95) se reduce a

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (96)$$

Consecuentemente, si L no depende explícitamente de t , el Hamiltoniano H es una constante de movimiento.

b) *En un sistema conservativo donde las relaciones de restricción no dependen explícitamente del tiempo, el Hamiltoniano es igual a la energía mecánica del sistema*

Cuando las ecuaciones de restricción no dependen explícitamente del tiempo, las ecuaciones de transformación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas generalizadas tampoco contienen el tiempo en forma explícita. En efecto, si existen k ecuaciones de restricción holónomas, se cumple que:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_{\sigma}, \dots, q_{n-k}) \quad (97)$$

En ese caso, se puede escribir que:

$$\dot{x}_i = \sum_{\sigma} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_{\sigma}} \right) \dot{q}_{\sigma} \quad (98)$$

Utilizando (98), la energía cinética del sistema se escribe como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} \left(\sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_{\sigma}} \frac{\partial x_i}{\partial q_{\lambda}} \right) \dot{q}_{\sigma} \dot{q}_{\lambda} \quad (99)$$

Definiendo:

$$m_{\sigma,\lambda} \equiv \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\sigma} \frac{\partial x_i}{\partial q_\lambda} \quad (100)$$

la expresión (99) adopta la forma:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} m_{\sigma,\lambda} \dot{q}_\sigma \dot{q}_\lambda \quad (101)$$

Si además el sistema es conservativo, se tiene que: $L = T - V$, donde $V(q_1, \dots, q_{n-k})$. Entonces, el primer término en la expresión para el Hamiltoniano en (90) se escribe como:

$$\sum_{\sigma} p_{\sigma} \dot{q}_{\sigma} = \sum_{\sigma} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\sigma}} \dot{q}_{\sigma} = \sum_{\sigma} \dot{q}_{\sigma} \frac{1}{2} \left(\sum_{\rho} m_{\sigma,\rho} \dot{q}_{\rho} + \sum_{\lambda} m_{\lambda,\sigma} \dot{q}_{\lambda} \right) \quad (102)$$

Dado que los subíndices λ y ρ son mudos, (102) se reduce a:

$$\sum_{\sigma} p_{\sigma} \dot{q}_{\sigma} = \sum_{\sigma} \sum_{\lambda} m_{\sigma,\lambda} \dot{q}_{\sigma} \dot{q}_{\lambda} = 2T \quad (103)$$

Consecuentemente:

$$H = \sum_{\sigma} p_{\sigma} \dot{q}_{\sigma} - L = 2T - (T - V) = T + V = E \quad (104)$$

Recuerde que, en general, el Hamiltoniano no es la energía del sistema.

1 ANGULOS DE EULER

Anteriormente demostramos que la orientación de un sólido rígido con respecto a un sistema de referencia fijo queda únicamente determinada especificando 3 parámetros. Existen varias elecciones posibles. Los llamados ángulos de Euler son una de esas alternativas.

Consideremos dos sistemas de coordenadas con origen común O y cuyos ejes de coordenadas coinciden originalmente. Uno de los sistemas está fijo y definido por el triedro de vectores ortonormales $(\hat{e}_1^o, \hat{e}_2^o, \hat{e}_3^o)$. El segundo sistema es solidario al sólido y está definido por el triedro de vectores ortonormales $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$. Los ángulos de Euler quedan definidos de la siguiente manera (Figura 1).

1. Una rotación del sólido en un ángulo α en torno a $\hat{e}_3^o$ lleva al vector $\hat{e}_2$ a la posición conocida con el nombre de *línea de nodos*, a lo largo de la cual definimos el vector unitario $\hat{e}_\beta$.

2. En esa configuración se hace rotar al sólido en un ángulo β en torno a la línea de nodos; llevando así al vector $\hat{e}_3$ a su posición definitiva.

3. La posición final se alcanza rotando en un ángulo γ en torno al eje $\hat{e}_3$.

Estas tres rotaciones permiten alcanzar cualquier orientación del sólido partiendo de una orientación arbitraria.

Note que los tres ángulos de Euler pueden variar independientemente; luego, pueden ser utilizados como coordenadas generalizadas para describir el movimiento del sólido.

Las siguientes relaciones entre los vectores unitarios anteriormente definidos resultan útiles para una mejor comprensión de los ángulos de Euler.

- i) La línea de nodos ($\hat{e}_\beta$) es perpendicular al plano formado por los vectores $\hat{e}_3^o, \hat{e}_3$.
- ii) La orientación del vector $\hat{e}_3$ con respecto al triedro fijo $(\hat{e}_1^o, \hat{e}_2^o, \hat{e}_3^o)$, queda determinada especificando los ángulos β y γ (coordenadas esféricas).
- iii) El ángulo γ es una simple rotación en torno a la posición final del eje $\hat{e}_3$.

Una de las cantidades centrales en el estudio de la dinámica de un sólido rígido es la energía cinética de rotación. En el sistema de coordenadas de los ejes principales, queda expresada como

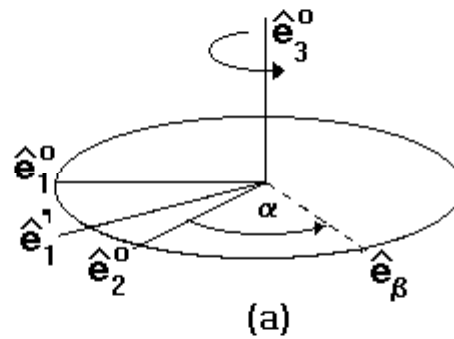
$$T = \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (1)$$

Nuestro propósito es escribir (1) en función de los ángulos de Euler, α, β y γ . Si ocupamos, la propiedad de adición de las velocidades angulares, el vector $\vec{\omega}$ se puede escribir en dos formas alternativas:

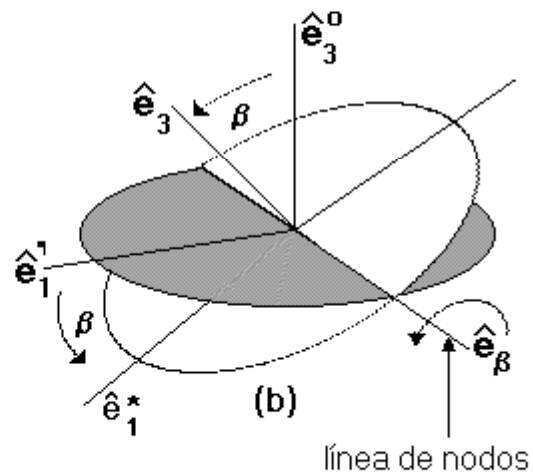
$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 = \omega_\alpha \hat{e}_\alpha + \omega_\beta \hat{e}_\beta + \omega_\gamma \hat{e}_\gamma \quad (2)$$

ANGULOS DE EULER

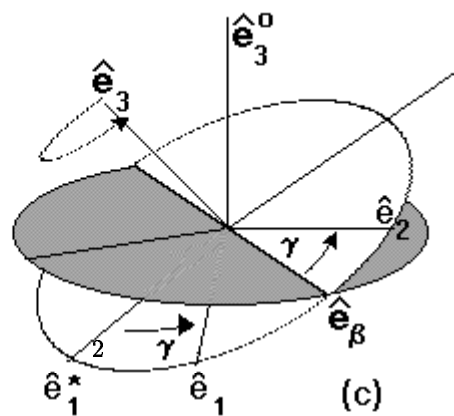
Rotación en α
alrededor de $\hat{\mathbf{e}}_3^0$



Rotación en β
alrededor de la
línea de nodos



Rotación en γ
alrededor de $\hat{\mathbf{e}}_3$



donde $\hat{e}_\alpha = \hat{e}_3^\circ$ y $\hat{e}_\gamma = \hat{e}_3$. También,

$$\omega_\alpha \equiv \dot{\alpha} \quad \omega_\beta \equiv \dot{\beta} \quad \omega_\gamma \equiv \dot{\gamma}$$

De la figura (1c) se puede ver que

$$\hat{e}_\beta = \text{sen}\gamma \hat{e}_1 + \text{cos}\gamma \hat{e}_2 \quad (3)$$

De la figura (1b) obtenemos que

$$\hat{e}_3^\circ = -\text{sen}\beta \hat{e}_1^* + \text{cos}\beta \hat{e}_3 \quad (4)$$

donde el vector unitario $\hat{e}_1^*$ se escribe como (ver Figura(1): $\hat{e}_1^* = \text{cos}\gamma \hat{e}_1 - \text{sen}\gamma \hat{e}_2$. Luego:

$$\hat{e}_3^\circ = -\text{sen}\beta \text{cos}\gamma \hat{e}_1 + \text{sen}\beta \text{sen}\gamma \hat{e}_2 + \text{cos}\beta \hat{e}_3 \quad (5)$$

Reemplazando, (3 y 5) en (2), se obtiene que:

$$\omega_1 = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_1 = -\dot{\alpha} \text{sen}\beta \text{cos}\gamma + \dot{\beta} \text{sen}\gamma \quad (6)$$

$$\omega_2 = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_2 = \dot{\alpha} \text{sen}\beta \text{sen}\gamma + \dot{\beta} \text{cos}\gamma \quad (7)$$

$$\omega_3 = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_3 = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \text{cos}\beta \quad (8)$$

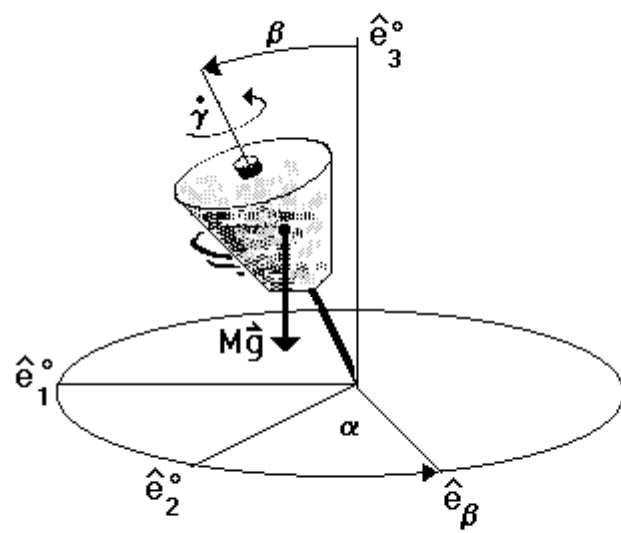
Utilizando estos resultados en (1), obtenemos la expresión de la energía cinética de rotación en función de los ángulos de Euler

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\alpha}^2 \text{sen}^2 \beta \text{cos}^2 \gamma + \dot{\beta}^2 \text{sen}^2 \gamma - 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \text{sen}\beta \text{sen}\gamma \text{cos}\gamma) \\ &+ \frac{1}{2} I_2 (\dot{\alpha}^2 \text{sen}^2 \beta \text{sen}^2 \gamma + \dot{\beta}^2 \text{cos}^2 \gamma + 2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \text{sen}\beta \text{sen}\gamma \text{cos}\gamma) \\ &+ \frac{1}{2} I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \text{cos}\beta)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

2 TROMPO SIMETRICO. Movimiento en un campo gravitacional uniforme, con un punto del eje de simetría fijo.

La dinámica de un sólido rígido arbitrario es un problema complicado. En esta sección restringiremos nuestro estudio al caso particular de un trompo que posee dos momentos principales iguales ($I_1 = I_2 \neq I_3$). Entonces, la expresión para la energía cinética (9) se reduce a:

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\alpha}^2 \text{sen}^2 \beta + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \text{cos}\beta)^2 \quad (10)$$



Consideremos un trompo simétrico que rota alrededor de su eje de simetría axial (púa) con el extremo fijo, bajo la acción de la fuerza de gravedad (2). La energía potencial gravitacional tiene la forma

$$V = M g l \cos\beta$$

Entonces, el lagrangeano del sistema es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}I_1(\dot{\alpha}^2 \sen^2\beta + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos\beta)^2 - M g l \cos\beta \quad (11)$$

Una inspección rápida de este Lagrangeano nos revela que es independiente de los ángulos α y γ (coordenadas cíclicas). Luego, los momenta generalizados p_α y p_γ son constantes de movimiento. Específicamente,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}}\right) \equiv \dot{p}_\alpha = \frac{d}{dt}(I_1 \dot{\alpha} \sen^2\beta + I_3 (\dot{\alpha} \cos\beta + \dot{\gamma}) \cos\beta) = 0 \quad (12)$$

Luego,

$$p_\alpha = I_1 \dot{\alpha} \sen^2\beta + I_3 (\dot{\alpha} \cos\beta + \dot{\gamma}) \cos\beta = \text{constante} \quad (13)$$

De la misma manera,

$$p_\gamma = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right) = I_3 (\dot{\alpha} \cos\beta + \dot{\gamma}) = \text{constante} \quad (14)$$

Note que p_α , p_β y p_γ son las componentes del momentum angular $\vec{l}$ del trompo en la dirección de los vectores unitarios $\hat{e}_\alpha$, $\hat{e}_\beta$ y $\hat{e}_\gamma$, respectivamente. En efecto, en el sistema solidario de los ejes principales, el vector momentum angular se escribe como,

$$\vec{l} = I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_1 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3 \quad (15)$$

Multiplicando escalarmente esta ecuación por $\hat{e}_\alpha$ y utilizando (5, 3 y recordando que $\hat{e}_\gamma = \hat{e}_3$), se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{l} \cdot \hat{e}_\alpha &= -I_1 \omega_1 \sen \beta \cos \gamma + I_1 \omega_2 \sen \beta \sen \gamma + I_3 \omega_3 \cos \beta \quad (16) \\ &= -I_1 (-\sen \beta \cos \gamma \dot{\alpha} + \sen \gamma \dot{\beta}) \sen \beta \cos \gamma \\ &\quad + I_1 (\sen \beta \sen \gamma \dot{\alpha} + \dot{\beta} \cos \gamma) \sen \beta \sen \gamma \\ &\quad + I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \cos \beta \\ &= I_1 \dot{\alpha} \sen^2 \beta + I_3 (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \cos \beta) \cos \beta = p_\alpha \end{aligned} \quad (17)$$

Análogamente, se demuestra que $\hat{e}_\beta \cdot \vec{l} = p_\beta$ y $\hat{e}_\gamma \cdot \vec{l} = p_\gamma$. De (13) y (14) se concluye que las componentes del momentum angular en las direcciones de los vectores $\hat{e}_\alpha$ y $\hat{e}_\gamma$ se conservan.

Por otra parte, la ecuación de Lagrange para la coordenada generalizada β es:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \quad (18)$$

Después de realizar las derivadas indicadas y reordenar los términos se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$I_1 \ddot{\beta} = -I_3 \dot{\alpha}(\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma}) \sin \beta + I_1 \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + M g l \sin \beta \quad (19)$$

Esta ecuación es complicada de resolver; no obstante puede ser simplificada en buena medida despejando $\dot{\alpha}$ y $\dot{\gamma}$ en función de β de las ecuaciones (13) y (14). En efecto, utilizando estas relaciones se obtiene que:

$$\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha - p_\gamma \cos \beta}{I_1 \sin^2 \beta} \quad (20)$$

$$\dot{\gamma} = p_\gamma \left(\frac{1}{I_3} + \frac{\cot^2 \beta}{I_1} \right) - \frac{p_\alpha \cos \beta}{I_1 \sin^2 \beta} \quad (21)$$

Reemplazando (21) en (19) se obtiene una ecuación diferencial que sólo depende de β :

$$I_1 \ddot{\beta} = I_1 \sin \beta \cos \beta \left(\frac{p_\alpha - p_\gamma \cos \beta}{I_1 \sin^2 \beta} \right)^2 - p_\gamma \sin \beta \left(\frac{p_\alpha - p_\gamma \cos \beta}{I_1 \sin^2 \beta} \right) + M g l \sin \beta \quad (22)$$

$$= \frac{\cos \beta}{I_1 \sin^3 \beta} (p_\alpha^2 - 2 p_\alpha p_\gamma \cos \beta + p_\gamma^2) - \frac{p_\alpha p_\gamma}{I_1 \sin \beta} + M g l \sin \beta \quad (23)$$

Esta ecuación diferencial es altamente no lineal, lo que significa que encontrar su solución es un problema complicado. Supongamos que ésto ya se ha logrado. Entonces, las ecuaciones (21) pueden en principio de ser integradas con respecto al tiempo para obtener $\alpha = \alpha(t)$ y $\gamma = \gamma(t)$.

En lugar de intentar una solución directa de la ecuación diferencial, utilizaremos un camino alternativo que permite obviar esta etapa. El punto de partida es notar que en este problema sólo intervienen fuerzas conservativas; consecuentemente, la energía total del sistema se conserva.

$$E = T + V = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma})^2 + M g l \cos \beta \quad (24)$$

Utilizando las relaciones (21) en (24), la energía se escribe como:

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta}^2 + \frac{(p_\alpha - p_\gamma \cos \beta)^2}{2 I_1 \sin^2 \beta} + \frac{p_\gamma^2}{2 I_3} + M g l \cos \beta \quad (25)$$

Esta expresión se puede reescribir como:

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\beta}^2 + V_{eff}(\beta) \quad (26)$$

donde hemos definido el potencial efectivo V_{eff} como:

$$V_{eff} \equiv \frac{(p_\alpha - p_\gamma \cos \beta)^2}{2 I_1 \sin^2 \beta} + \frac{p_\gamma^2}{2 I_3} + M g l \cos \beta \quad (27)$$

Si derivamos la ecuación (26) con respecto a la coordenada generalizada β , reproducimos exactamente la ecuación (23)

$$I_1 \ddot{\beta} = - \frac{\partial V_{eff}}{\partial \beta} \quad (28)$$

Estudio de la ecuación (28) en la vecindad de un punto de equilibrio dinámico β_0 .

La función $V_{eff}(\beta)$ consta de tres términos que han sido graficados independientemente en la Figura (2). El término $p_\gamma^2/2 I_3$ es una constante que no altera la posición del mínimo de la función V_{eff} y puede ser absorbida en la elección de la referencia de potencial cero. La posición del mínimo queda esencialmente determinada por el primer término en (27). El valor más pequeño de este término es cero y ocurre cuando $p_\alpha = p_\gamma \cos \beta$. Eso significa que el valor de la razón p_α/p_γ queda comprendido entre $+1$ y -1 . El gráfico de la figura ha sido confeccionado para una razón $p_\alpha/p_\gamma \geq 0$. El término proporcional a $\cos \beta$ tiene el efecto de desplazar el mínimo de la función hacia valores mayores de β . Las características principales de este gráfico son: a) Que presenta un mínimo en la vecindad del ángulo $\beta = \beta_0$, b) Que para cualquier energía mayor que $V_{eff}(\beta_0)$, existen dos puntos de retorno β_+ y β_- , entre los cuales se desplaza el sólido. En β_0 , los puntos de retorno coinciden; i.e. $\dot{\beta} = 0$. También se cumple que $\ddot{\beta} = 0$ pues, β_0 es el mínimo de la función potencial.

Evalutando (21) en β_0 , obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_0 &= \dot{\alpha}(\beta_0) \\ \dot{\gamma}_0 &= \dot{\gamma}(\beta_0) \end{aligned} \quad (29)$$

Integrando (29) vemos que, en este caso, los ángulos α y γ varían linealmente en el tiempo.

Analicemos ahora el comportamiento de $\beta(t)$ en la vecindad de β_0 . Para ello escribimos $\beta(t) = \beta_0 + \eta(t)$, donde $\eta(t)$ es una función arbitraria, infinitesimal. Entonces, una expansión en serie de Taylor de V_{eff} en la vecindad de β_0 tiene la forma

$$V_{eff} = V_{eff}(\beta_0) + \left(\frac{\partial V_{eff}}{\partial \beta} \right)_{\beta_0} \eta(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \beta^2} \right)_{\beta_0} \eta(t)^2 + \dots \quad (30)$$

La primera derivada de (27) evaluada en $\beta = \beta_0$ es:

$$\left(\frac{\partial V_{eff}}{\partial \beta} \right)_{\beta_0} = \left(\frac{(p_\alpha - p_\gamma \cos \beta)(p_\gamma - p_\alpha \cos \beta)}{I_1 \sin^3 \beta} - M g l \sin \beta \right)_{\beta_0} = 0 \quad (31)$$

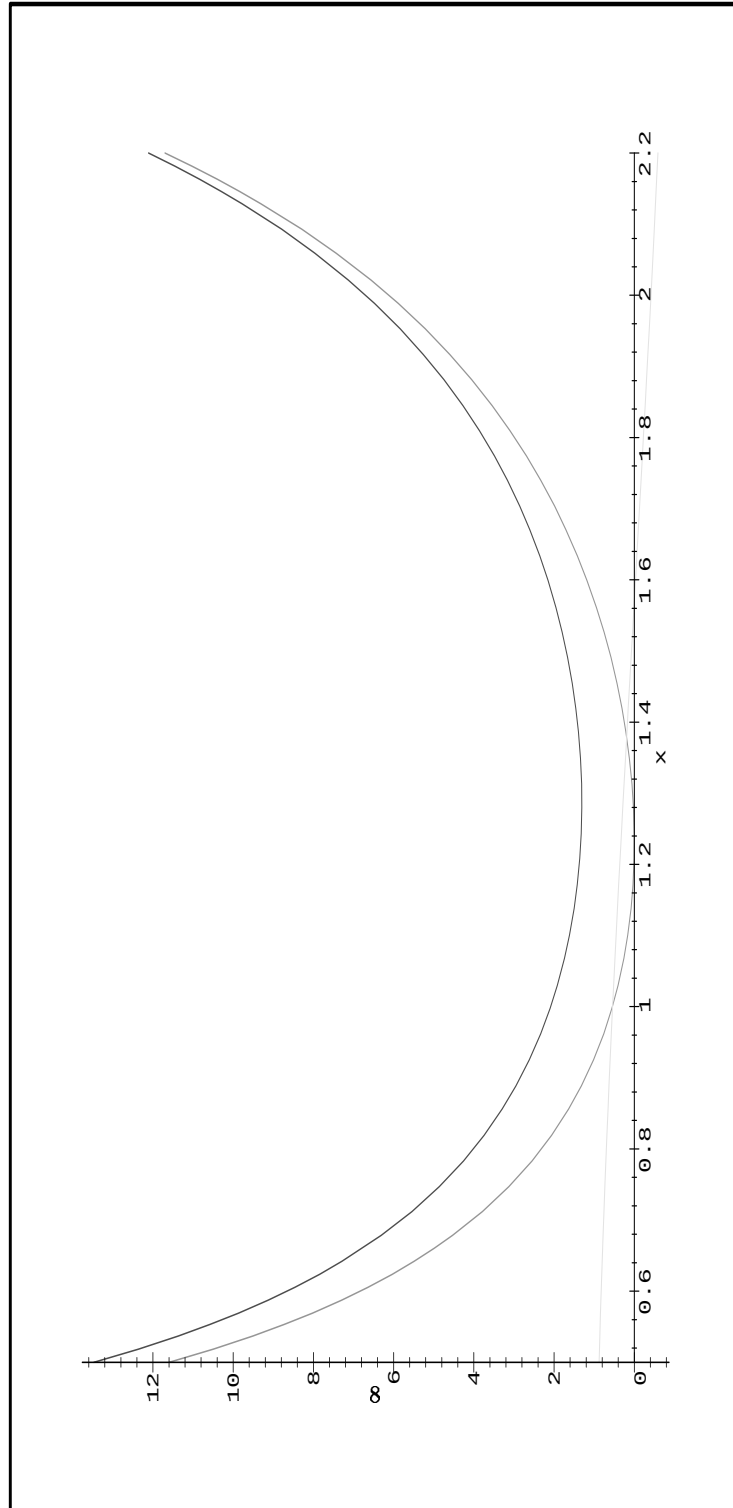


Figura 3: Función potencial efectivo y las diferentes contribuciones que la conforman

La segunda derivada del potencial efectivo evaluada en β_0 se obtiene derivando (27) y utilizando (31)

$$\left(\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \beta^2} \right)_{\beta_0} = \frac{p_\alpha p_\gamma - I_1 M g l (4 - 3 \sin^2 \beta_0)}{I_1 \cos \beta_0} \quad (32)$$

Utilizando estos resultados, la energía total del trompo se escribe como

$$E = \frac{1}{2} I_1 \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \beta^2} \right)_{\beta_0} \eta^2 + V_{eff}(\beta_0) \quad (33)$$

Claramente, (33) tiene la misma forma que la energía de un oscilador armónico de frecuencia Ω :

$$\Omega^2 = \frac{1}{I_1} \left(\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \beta^2} \right)_{\beta_0} > 0 \quad (34)$$

Así, resulta inmediato escribir que:

$$\beta(t) = \beta_0 + \eta(t) = \beta_0 + \eta_0 \cos(\Omega t + \phi) \quad (35)$$

donde, ϕ es una constante de fase y η_0 es una constante cuyo valor depende de las condiciones iniciales. El movimiento es estable si $\Omega^2 > 0$ y esto se logra cuando el producto $p_\alpha p_\gamma$ en (32) tiene un valor positivo suficientemente grande.

2.1 APLICACIONES

2.2 Trompo dormido.

Así se denomina la configuración en que el trompo es colocado a rotar con su eje practicamente vertical. Las condiciones iniciales son:

$$\beta_0 = 0 \quad \dot{\beta} = 0 \quad (36)$$

En esta configuración se cumple que $\hat{e}_3 = \hat{e}_3^0$ y consecuentemente $\dot{\alpha} = \dot{\gamma}$. Asimismo, se cumple que $p_\alpha = p_\gamma$.

¿ Es estable la rotación del trompo en esta configuración? La respuesta es afirmativa cuando la frecuencia Ω^2 en la ecuación (34) es positiva. Es decir, se debe cumplir que

$$\Omega^2 = p_\gamma^2 - 4 I_1 M g l > 0 \quad (37)$$

En la práctica, debido al roce de la púa con el suelo, p_γ decrece hasta llegar a su valor límite

$$p_\gamma = \sqrt{2 I_1 M g l} \quad (38)$$

Para valores de p_γ inferiores a éste, el movimiento es inestable.

2.3 Precesión y Nutación.

Conocidos los valores de p_α y p_γ , la ecuación diferencial para $\beta(t)$ queda determinada. Una vez encontrado $\beta(t)$ es posible en principio calcular $\alpha(t)$ y $\gamma(t)$. El tratamiento general es complicado y aquí nos restringiremos a estudiar el movimiento del trompo en la vecindad de la posición de equilibrio. En ese caso sabemos de (35) que: $\beta = \beta_0 + \eta_0 \cos(\Omega t + \phi)$. Las expresiones para $\dot{\alpha}$ y $\dot{\gamma}$ se obtienen llevando a cabo una expansión en serie de Taylor en la vecindad de $\beta = \beta_0$, hasta el primer orden en $\eta = \beta - \beta_0$.

$$\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha - p_\gamma \cos \beta}{I_1 \sin^2 \beta} \cong (\dot{\alpha})_{\eta=0} + \left(\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \beta} \right)_{\eta=0} \eta + \dots \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= p_\gamma \left(\frac{1}{I_3} + \frac{\cot^2 \beta}{I_1} \right) - \frac{p_\alpha \cos \beta}{I_1 \sin^2 \beta} \\ &\cong (\dot{\gamma})_{\eta=0} + \left(\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \beta} \right)_{\eta=0} \eta + \dots \end{aligned} \quad (40)$$

Por comodidad definiremos:

$$\dot{\alpha}_1 \equiv \left(\frac{\partial \dot{\alpha}}{\partial \beta} \right)_{\eta=0} \quad \dot{\gamma}_1 \equiv \left(\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \beta} \right)_{\eta=0} \quad (41)$$

Entonces, las ecuaciones (41) adoptan la forma:

$$\dot{\alpha} \cong \dot{\alpha}_0 + \dot{\alpha}_1 \eta + \dots \quad (42)$$

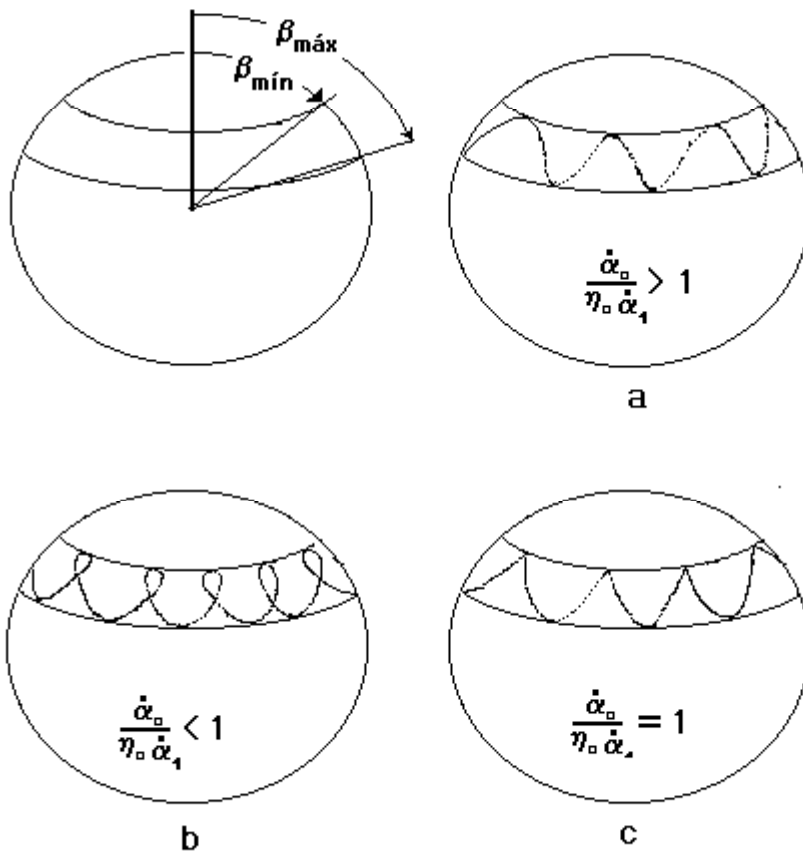
$$\dot{\gamma} \cong \dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma}_1 \eta + \dots \quad (43)$$

Supongamos que p_α y p_γ tienen valores tales que $\dot{\alpha}_0$, $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\gamma}_0$ y $\dot{\gamma}_1$ son todos positivos. Entonces, el movimiento del trompo tiene las siguientes características:

- 1) La dependencia sinusoidal de $\eta(t)$ en el tiempo (35) implica que $\dot{\alpha}$ y $\dot{\gamma}$ oscilan en la vecindad de los valores medios $\dot{\alpha}_0$ y $\dot{\gamma}_0$ en el transcurso del tiempo con frecuencia Ω .
- 2) Utilizando la suposición que $\dot{\alpha}_0$ y $\dot{\alpha}_1$ son positivos, se deduce de (42) que $\dot{\alpha}$ alcanza su máximo cuando $\beta(t)$ es máximo (η máximo); es decir, la velocidad de precesión del trompo ($\dot{\alpha}$) es mayor cuando el eje de simetría $\hat{e}_3$ está más alejado de la vertical. A medida que $\beta(t)$ decrece, la velocidad de precesión también decrece. Así, el eje $\hat{e}_3$ describe un rizo en el transcurso del tiempo cuya forma depende de la magnitud relativa de $\dot{\alpha}_0$ y $\dot{\alpha}_1$ (Figura 2.3).
- 3) La velocidad angular $\dot{\gamma}$ también oscila en el transcurso del tiempo, tal como se observa en la expresión (43), sin embargo, dado que $\dot{\gamma}_0$ en general es mucho mayor que $\dot{\gamma}_1$, esa variación es difícil de observar a simple vista y requiere en general de un estroboscopio.

- 4) En general, $\dot{\alpha}_0$ y Ω no son múltiplos enteros uno de otro; consecuentemente, el trompo no retorna a la misma condición de partida después de completar una vuelta de precesión.

NUTACIÓN Y PRECESIÓN



Movimiento de un trompo con diferentes condiciones iniciales. En (a) la velocidad de precesión del trompo se mantiene siempre positiva. En (b), la velocidad angular de precesión es positiva en $\beta_{\text{máx}}$ y negativa en $\beta_{\text{mín}}$. En (c), la velocidad angular $\dot{\alpha}(t)$ se anula en $\beta_{\text{mín}}$ y es positiva en $\beta_{\text{máx}}$.

1 Oscilaciones pequeñas

1.0.1 Introducción

Un tipo de movimiento muy común en toda clase de sistemas mecánicos ocurre en la vecindad de una configuración de *equilibrio estable*; i.e., cuando el sistema está restringido a moverse en el entorno de un mínimo de la función energía potencial. Se dice entonces que el sistema realiza *pequeñas oscilaciones* alrededor de esa posición de equilibrio.

En esta sección se presenta un tratamiento formal que permite analizar en detalle este tipo de movimiento cuando el sistema tiene muchos grados de libertad.

En esta presentación se supondrá que todas la fuerzas externas son conservativas y que las relaciones de restricción no dependen explícitamente del tiempo; entonces, la energía cinética se puede escribir como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} m_{\sigma,\lambda} \dot{q}_{\sigma} \dot{q}_{\lambda} \quad (1)$$

donde,

$$m_{\sigma,\lambda} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_{\sigma}} \frac{\partial x_i}{\partial q_{\lambda}} \quad (2)$$

Dado que las relaciones $x_i = x_i(q_1, \dots, q_{n-k})$ son funciones reales, se cumple que:

$$m_{\sigma,\lambda} = m_{\sigma,\lambda}^* = m_{\lambda,\sigma} = m_{\lambda,\sigma}^* \quad (3)$$

En la Figura 1.0.1 se muestra el gráfico de la función potencial versus una coordenada generalizada, en los casos de equilibrio *estable*, *inestable* e *indiferente*. Para que un sistema de $n - k$ grados de libertad tenga un punto de equilibrio estable en $q_1^{\circ}, q_2^{\circ} \dots q_{n-k}^{\circ}$ se debe cumplir que:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_{\sigma}} \right)_{q_1^{\circ}, q_2^{\circ} \dots q_{n-k}^{\circ}} = 0 \quad \sigma = 1, 2, \dots, n - k \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_{\sigma} \partial q_{\lambda}} \right)_{q_1^{\circ}, q_2^{\circ} \dots q_{n-k}^{\circ}} > 0 \quad \sigma, \lambda = 1, 2, \dots, n - k \quad (5)$$

En la vecindad de la configuración de equilibrio estable, resulta conveniente escribir las coordenadas generalizadas como:

$$q_{\sigma} = q_{\sigma}^{\circ} + \eta_{\sigma} \quad (6)$$

Figura 1: (a) Estable , (b) Inestable y (c) Indiferente

donde, las funciones η_σ son pequeñas. De (6) se deduce que:

$$\dot{q}_\sigma = \dot{\eta}_\sigma \quad (7)$$

Utilizando (7), la energía cinética (1) adopta la forma:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} m_{\sigma,\lambda} \dot{\eta}_\sigma \dot{\eta}_\lambda \quad (8)$$

Llevando a cabo una expansión en serie de Taylor de la función potencial en la vecindad del punto de equilibrio estable se obtiene que:

$$V = V(q_1^\circ, q_2^\circ \dots q_{n-k}^\circ) + \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\sigma \partial q_\lambda} \right)_{q_1^\circ, q_2^\circ \dots q_{n-k}^\circ} \eta_\sigma \eta_\lambda + \dots \quad (9)$$

Note que las primeras derivadas no aparecen en la expansión, pues son nulas de acuerdo con (4). De aquí en adelante ocuparemos la siguiente notación:

$$v_{\sigma,\lambda} \equiv \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_\sigma \partial q_\lambda} \right)_{q_1^\circ, q_2^\circ \dots q_{n-k}^\circ} \quad (10)$$

Con esta notación, la energía potencial se escribe como:

$$V = V(q_1^\circ, q_2^\circ \dots q_{n-k}^\circ) + \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} v_{\sigma,\lambda} \eta_\sigma \eta_\lambda + \dots \quad (11)$$

Note que, cuando la función potencial es real, se cumple que:

$$v_{\sigma,\lambda} = v_{\sigma,\lambda}^* = v_{\lambda,\sigma} = v_{\lambda,\sigma}^* \quad (12)$$

Utilizando (8) y (11), el lagrangeano del sistema, al segundo orden en η_σ , se escribe como:

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} m_{\sigma,\lambda} \dot{\eta}_\sigma \dot{\eta}_\lambda \quad (13)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} v_{\sigma,\lambda} \eta_\sigma \eta_\lambda - V(q_1^\circ, q_2^\circ \dots q_{n-k}^\circ) \quad (14)$$

Entonces, la ecuación de Lagrange para la coordenada η_λ es:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\lambda} - \frac{\partial L}{\partial \eta_\lambda} = 0 \quad (15)$$

$$\sum_{\sigma=1}^{n-k} (m_{\sigma,\lambda} \ddot{\eta}_\sigma + v_{\sigma,\lambda} \eta_\sigma) = 0 \quad \lambda = 1, 2, \dots, n-k \quad (16)$$

La linealidad del sistema de ecuaciones (16) procede del hecho que el lagrangeano (14) es una forma cuadrática de las coordenadas y las velocidades generalizadas.

Antes de abordar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales lineales (16), conviene estudiar el caso particular de un sistema con un grado de libertad. Eso permitirá revisar un ejemplo familiar e introducir la notación básica que se utilizará en las secciones subsiguientes. En ese caso particular, el sistema de ecuaciones (16) se reduce a una única ecuación, que corresponde a la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple (suponiendo que $v_{1,1} > 0$). Introduciendo la notación $m_{1,1} \equiv m$ y $v_{1,1} = k$, esa ecuación se escribe como:

$$m \ddot{\eta} + k \eta = 0 \quad (17)$$

La solución de (17) conviene escribirla en una notación apropiada para ser extendida fácilmente a sistemas con muchos grados de libertad.

Note que la ecuación (17) tiene coeficientes reales; luego, puede ser escrita como la parte real de la ecuación:

$$\ddot{z} + \frac{k}{m} z = 0 \quad (18)$$

donde $z(t)$ es una variable compleja; tal que, $\eta(t) \equiv \text{Re} z(t)$. La linealidad de (18) sugiere que la solución es del tipo:

$$z(t) = z_0 \exp(i\omega t) \quad (19)$$

donde, z_0 es una constante compleja. Reemplazando (19) en la ecuación (18) se obtiene que:

$$(\omega^2 - \frac{k}{m}) z_0 = 0 \quad (20)$$

De donde resultan dos soluciones para ω :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad y \quad \omega_2 = -\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (21)$$

Entonces, la solución general de (18) se escribe como:

$$z(t)^{(1)} = z_+^{(1)} \exp(i\omega_1 t) + z_-^{(1)} \exp(-i\omega_1 t) \quad (22)$$

Las constantes complejas $z_+^{(1)}$ y $z_-^{(1)}$ equivalen a cuatro constantes reales. El superíndice y el subíndice (1) en (22) son redundantes en el caso de un sistema con un grado de libertad y han sido incluídos solamente para permitir una conexión continua con la solución general que se verá más adelante.

Tomando la parte real de (22) se obtiene la solución de la ecuación original (17):

$$\eta(t)^{(1)} = \text{Re } z(t)^{(1)} = \frac{z_+^{(1)} + z_-^{(1)*}}{2} \exp(i\omega_1 t) + \frac{z_+^{(1)*} + z_-^{(1)}}{2} \exp(-i\omega_1 t) \quad (23)$$

Definición:

$$z_0^{(1)} = z_+^{(1)} + z_-^{(1)*} \equiv \rho^{(1)} \exp(i\phi_1) \quad (24)$$

donde $\rho^{(1)}$ y ϕ_1 son *constantes reales* que se determinan a partir de las condiciones iniciales del problema. Entonces,

$$\eta(t)^{(1)} = \text{Re} \left\{ \rho^{(1)} \exp(i\omega_1 t + i\phi_1) \right\} = \rho^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (25)$$

1.1 Caso General

Siguiendo un procedimiento análogo al descrito en la sección anterior, el sistema de ecuaciones (16) se puede escribir en función de $n - k$ variables complejas z_σ como sigue:

$$\sum_{\lambda=1}^{n-k} (m_{\sigma,\lambda} \ddot{z}_\lambda + v_{\sigma,\lambda} \dot{z}_\lambda) = 0 \quad \sigma = 1, 2, \dots, n - k \quad (26)$$

donde: $\operatorname{Re} \{z_\sigma\} = \eta_\sigma$.

Intentaremos encontrar la solución al sistema de ecuaciones (26) escribiendo:

$$z_\sigma = z_\sigma^\circ \exp(i\omega t) \quad (27)$$

donde z_σ° es una constante compleja. Reemplazando (27) en (26) se obtiene:

$$\sum_{\lambda=1}^{n-k} (v_{\sigma,\lambda} - \omega^2 m_{\sigma,\lambda}) z_\lambda^\circ = 0 \quad \sigma = 1, 2, \dots, n - k \quad (28)$$

El sistema (28) es un sistema de ecuaciones lineales, homogéneo, con coeficientes reales, de $n - k$ ecuaciones y $n - k$ incógnitas. Para que existan soluciones de este sistema distintas de la solución trivial (i.e., $z_\lambda^\circ = 0$, para todo λ) se debe cumplir que el determinante de los coeficientes sea igual a cero ¹

$$\det \parallel (v_{\sigma,\lambda} - \omega^2 m_{\sigma,\lambda}) \parallel = 0 \quad (29)$$

La ecuación (29) es llamada la *ecuación característica* y es un polinomio de grado $n - k$ en ω^2 ; luego, existen $n - k$ raíces ω_s^2 , $s = 1, 2, \dots, n - k$. Las cantidades ω_s reciben el nombre de *frecuencias características*, *frecuencias propias o autofrecuencias*. Para cada ω_s existe una ecuación del tipo (28):

$$\sum_{\lambda=1}^{n-k} (v_{\sigma,\lambda} - \omega_s^2 m_{\sigma,\lambda}) z_\lambda^{(s)} = 0 \quad \sigma = 1, 2, \dots, n - k \quad (30)$$

Note que el superíndice (o) en (28) ha sido reemplazado por (s) en (30) cuando la frecuencia es ω_s .

Antes de proseguir, demostraremos algunas propiedades generales de las raíces ω_s .

¹An Introduction to the THEORY of LINEAR SPACES by Georgi E. Shilov. Traducido del ruso por Richard A. Silverman, Prentice Hall, Inc., 5a edición, (1965)

a) *Los valores ω_s^2 son reales y positivos*

Después de multiplicar (30) por $z_\sigma^{(s)*}$ y sumar sobre σ , se obtiene que:

$$\omega_s^2 = \frac{\sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} z_\sigma^{(s)*} v_{\sigma,\lambda} z_\lambda^{(s)}}{\sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} z_\sigma^{(s)*} m_{\sigma,\lambda} z_\lambda^{(s)}} \quad (31)$$

Escribiendo el número complejo $z_\sigma^{(s)}$ en función de su parte real y su parte imaginaria; i.e.: $z_\sigma^{(s)} = a_\sigma^{(s)} + i b_\sigma^{(s)}$, el numerador de (31) puede escribirse como:

$$\sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} (a_\sigma^{(s)} + i b_\sigma^{(s)})^* v_{\sigma,\lambda} (a_\lambda^{(s)} + i b_\lambda^{(s)}) \quad (32)$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} v_{\sigma,\lambda} a_\sigma^{(s)} a_\lambda^{(s)} + \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} v_{\sigma,\lambda} b_\sigma^{(s)} b_\lambda^{(s)} \quad (33)$$

donde, hemos utilizado la propiedad (12). Claramente, la expresión resultante es real. Además, cada una de las dobles sumatorias en (33) son formas cuadráticas positiva definidas. Esto se puede ver de (11), donde la doble sumatoria es necesariamente positiva, ya que $V(q_1^\circ, q_2^\circ \dots q_{n-k}^\circ)$ es el valor mínimo de la función energía potencial. Un argumento similar demuestra que el denominador de (31) es real y positivo. Esto completa la prueba que las cantidades ω_s^2 son reales y positivas.

b) *La razón $z_\sigma^{(s)}/z_M^{(s)}$, es real para cualquier valor de $M = 1, 2, \dots, n - k$.*

Esto se puede ver fácilmente al dividir cada ecuación del sistema (30) por $z_M^{(s)}$. De esta forma, el sistema homogéneo de $n - k$ incógnitas $z_\sigma^{(s)}$ se transforma en un sistema inhomogéneo de $n - k - 1$ incógnitas, $z_\sigma^{(s)}/z_M^{(s)}$, con coeficientes reales. Note que, ω_s^2 , $m_{\sigma,\lambda}$ y $v_{\sigma,\lambda}$ son números reales; consecuentemente, el valor de las incógnitas también es real. Pero, para que la razón entre dos números complejos sea real se requiere que ambos tengan la misma fase. En otras palabras, *la constante de fase resulta independiente del subíndice σ* ; i.e., el número complejo $z_\sigma^{(s)}$ tiene la forma:

$$z_\sigma^{(s)} = \rho_\sigma^{(s)} \exp(i\phi_s) \quad \sigma = 1, 2, \dots, n - k \quad (34)$$

c) Las amplitudes reales $\rho_\sigma^{(s)}$ satisfacen la siguiente relación de ortonormalidad.

$$\sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} \rho_\sigma^{(s)} m_{\sigma,\lambda} \rho_\lambda^{(t)} = \delta_{s,t} \quad (35)$$

Demostración. Utilizando (34), la ecuación (30) se puede reescribir como:

$$\sum_{\lambda=1}^{n-k} (v_{\sigma,\lambda} - \omega_s^2 m_{\sigma,\lambda}) \rho_\lambda^{(s)} = 0 \quad (36)$$

Una ecuación análoga se cumple para la frecuencia angular ω_t ; i.e:

$$\sum_{\lambda=1}^{n-k} (v_{\sigma,\lambda} - \omega_t^2 m_{\sigma,\lambda}) \rho_\lambda^{(t)} = 0 \quad (37)$$

Multiplicando (36) por $\rho_\sigma^{(t)}$, (37) por $\rho_\sigma^{(s)}$, sumando sobre σ ambas expresiones y luego restándolas, se obtiene que :

$$(\omega_s^2 - \omega_t^2) \sum_{\sigma=1}^{n-k} \sum_{\lambda=1}^{n-k} \rho_\sigma^{(s)} m_{\sigma,\lambda} \rho_\lambda^{(t)} = 0 \quad (38)$$

De (38) se deduce que cuando $\omega_s^2 \neq \omega_t^2$, la doble sumatoria necesariamente es nula, tal como se enunció en (35). Por otra parte, cuando $s \neq t$ pero $\omega_s^2 = \omega_t^2$, se dice que esas frecuencias son *degeneradas*. Puede ocurrir que la ecuación característica tenga varias raíces iguales; i.e., *doblemente*, *triplemente*, ... *n-veces degeneradas*; en ese caso la relación (35) aún se puede satisfacer utilizando el procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt (ver ejemplo). Cuando $t = s$, siempre se pueden redefinir las cantidades $\rho_\sigma^{(s)}$ de manera que se cumpla (35) (Normalización).

La solución general al sistema de ecuaciones (16) es una combinación lineal de las soluciones del tipo (27), con coeficientes que dependen de las condiciones iniciales del problema; i.e.:

$$z_\lambda(t) = \sum_s^{n-k} \left\{ z_{+,\lambda}^{(s)} \exp(i \omega_s t) + z_{-,\lambda}^{(s)} \exp(-i \omega_s t) \right\} \quad (39)$$

donde, $z_{+,\lambda}^{(s)}$ y $z_{-,\lambda}^{(s)}$ son constantes complejas. Tomando la parte real de (39), se obtiene que:

$$\text{Re } z_\lambda(t) \equiv \eta_\lambda(t) \quad (40)$$

$$= \sum_s^{n-k} \left\{ \frac{(z_{+, \lambda}^{(s)} + z_{-, \lambda}^{(s)*})}{2} \exp(i \omega_s t) + \frac{(z_{+, \lambda}^{(s)*} + z_{-, \lambda}^{(s)})}{2} \exp(-i \omega_s t) \right\}$$

Definiendo:

$$(z_{+, \lambda}^{(s)} + z_{-, \lambda}^{(s)*}) \equiv C_s \rho_\lambda^{(s)} \exp(i \phi_s) \quad (41)$$

donde C_s es una constante real, (39) puede ser escrita como:

$$\eta_\lambda(t) = \sum_s^{n-k} \text{Re} \left\{ C_s \rho_\lambda^{(s)} \exp(i \omega_s t) \right\} \quad (42)$$

$$= \sum_s^{n-k} C_s \rho_\lambda^{(s)} \cos(\omega_s t + \phi_s) \quad (43)$$

donde, las constantes C_s y ϕ_s se calculan a partir de las condiciones iniciales del problema.

Así, (43) muestra que la evolución temporal de cada coordenada η_λ es una superposición de $n - k$ movimientos armónicos $C_s \cos(\omega_s t + \phi_s)$ de frecuencia bien definida.

1.1.1 Coordenadas normales.

Una pregunta que se origina naturalmente se refiere a la posibilidad de elegir las coordenadas generalizadas de manera que cada una de ellas ejecute *individualmente* un movimiento armónico simple. En efecto, esto es posible y se logra eligiendo como coordenadas generalizadas las funciones:

$$\zeta_s = C_s \cos(\omega_s t + \phi_s) \quad s = 1, 2, \dots, n - k \quad (44)$$

Entonces, la ecuación (43) se escribe como:

$$\eta_\lambda = \sum_s^{n-k} \rho_\lambda^{(s)} \zeta_s \quad (45)$$

Note que la relación (45) es una transformación lineal entre las antiguas coordenadas η_λ y las nuevas coordenadas ζ_λ . Reescribiendo el lagrangeano (14) en función de las nuevas coordenadas, se tiene:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \lambda} \sum_{s, s'} \rho_\sigma^{(s)} m_{\sigma, \lambda} \rho_\lambda^{s'} \dot{\zeta}_s \dot{\zeta}_{s'} - \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \lambda} \sum_{s, s'} \rho_\sigma^{(s)} v_{\sigma, \lambda} \rho_\lambda^{s'} \zeta_s \zeta_{s'} - V_0 \quad (46)$$

Utilizando la relación de ortonormalidad (35), $\sum_{\sigma,\lambda} \rho_{\sigma}^{(s)} m_{\sigma,\lambda} \rho_{\lambda}^{(t)} = \delta_{s,t}$ y la relación (36), el lagrangeano (46) se reduce a:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n-k} \left(\dot{\zeta}_s^2 - \omega_s^2 \zeta_s^2 \right) - V_0 \quad (47)$$

Así, la ecuación de Lagrange para cada coordenada ζ_s resulta ser la ecuación de movimiento de un oscilador armónico simple de frecuencia ω_s :

$$\ddot{\zeta}_s - \omega_s^2 \zeta_s = 0 \quad (48)$$

Las coordenadas generalizadas $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-k}$ reciben el nombre de *coordenadas normales*. Este tipo de coordenadas resulta especialmente adecuado para analizar oscilaciones forzadas en un sistema de varios grados de libertad. En ese caso, el lagrangeano del sistema se escribe como:

$$L = L_0 + \sum_{\sigma=1}^{n-k} F_{\sigma}(t) \eta_{\sigma} \quad (49)$$

donde, L_0 es el lagrangeano (14). Escribiendo L en función de las coordenadas normales, se tiene que L_0 adopta la forma (47) y el segundo término en (49) se escribe como:

$$\sum_{\sigma=1}^{n-k} F_{\sigma}(t) \eta_{\sigma} = \sum_s \sum_{\sigma=1}^{n-k} F_{\sigma}(t) \rho_{\sigma}^{(s)} \zeta_s = \sum_s f_s(t) \zeta_s \quad (50)$$

donde:

$$f_s \equiv \sum_{\sigma=1}^{n-k} F_{\sigma}(t) \rho_{\sigma}^{(s)} \quad (51)$$

Entonces, el lagrangeano (49) se escribe como:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n-k} \left(\dot{\zeta}_s^2 - \omega_s^2 \zeta_s^2 \right) + \sum_s f_s(t) \zeta_s - V_0 \quad (52)$$

Utilizando las ecuaciones de Lagrange para el lagrangeano (52) se obtiene que cada coordenada normal satisface la ecuación típica de un oscilador armónico forzado:

$$\ddot{\zeta}_s + \omega_s^2 \zeta_s = f_s(t) \quad (53)$$

1.2 Vibraciones Moleculares.

Las moléculas son sistemas formadas por N partículas (átomos), cuyas interacciones mutuas dan lugar a diferentes configuraciones de equilibrio estable. En la vecindad de cada una de ellas la molécula presenta un conjunto de frecuencias propias de oscilación, igual al número de grados de libertad de vibración del sistema.

El número de grados de libertad de vibración de una molécula se calcula sustrayendo del número total de grados de libertad $3N$, 3 grados de libertad necesarios para fijar la posición del centro de masa del sistema y 3 grados de libertad (3 ángulos de Euler, por ejemplo) requeridos para determinar la orientación de la configuración de equilibrio con respecto a un sistema de coordenadas fijo. Así, el número de grados de libertad de vibración del sistema molecular resulta ser $3N - 6$. Una excepción la constituyen las moléculas cuya configuración de equilibrio es lineal, ya que sólo se requieren 2 ángulos para determinar su orientación en el espacio; debido a que la rotación a lo largo de la línea que las une no produce ningún efecto. En este caso, el número de grados de libertad de vibración es $3N - 5$.

Se acostumbra a clasificar los modos normales de vibración en una molécula de acuerdo a la simetría de los respectivos desplazamientos en torno a las posiciones de equilibrio. El método general utilizado en esta clasificación hace uso de teoría de grupos que es una materia que no se abordará en este curso². Sin embargo, algunas ideas generales de simetría pueden ser introducidas a este nivel para ayudar a visualizar la forma en que oscilan estos sistemas. En efecto, cuando las posiciones de equilibrio de los átomos están contenidas en un plano, los modos de oscilación se pueden clasificar en dos grupos: a) los átomos experimentan desplazamientos dentro del plano y b) los átomos se desplazan fuera del plano durante el movimiento. Para los movimientos que ocurren dentro del plano se tienen $2N$ grados de libertad. Restando dos grados de libertad que determinan la posición del centro de masa y un grado de libertad de rotación en torno a un eje perpendicular al plano, se obtiene que restan $2N - 3$ grados de libertad de vibración contenidos en el plano. Restando este número de la cantidad total de grados de libertad $3N - 6$ para una molécula cualquiera, se obtiene que existen $N - 3$ grados de libertad de vibración fuera del plano. En el caso de moléculas lineales, existen $N - 1$ grados de libertad de vibración longitudinales. Consecuentemente, la

²Consultar por ejemplo....

Figura 2: Modos de oscilación de una molécula lineal de tres átomos

cantidad de modos de oscilación transversales es $3N - 5 - (N - 1) = 2N - 4$. Pero, si llamamos eje x la dirección que definen las posiciones de equilibrio, vemos que $N - 2$ oscilaciones ocurren en la dirección y y otras $N - 2$, de la misma frecuencia, ocurren en la dirección z . En otras palabras, existen $N - 2$ frecuencias doblemente degeneradas.

EJEMPLO.

Determine las frecuencias de vibración de la molécula lineal simétrica de tres átomos ($m_1 = m_3$), que se muestra en la Figura 1.2. Suponga que la energía potencial de interacción sólo depende de las distancias AB , BA y del ángulo ABA . De acuerdo con la discusión desarrollada en los párrafos anteriores, el número de frecuencias propias longitudinales de una molécula lineal es $N - 1 = 2$ y el número de frecuencias transversales *distintas* es $N - 2 = 1$. Estas se muestran en la Figura 1.2.

Sean x_1 , x_2 y x_3 los desplazamientos longitudinales de los átomos A , B y C e y_1 , y_2 e y_3 sus desplazamientos transversales, medidos desde las respectivas posiciones de equilibrio. El lagrangeano del sistema es:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{y}_3^2 \\
 &- \frac{1}{2}k_2 l^2 \delta^2 - \frac{1}{2}k_1 \{(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2\}
 \end{aligned} \tag{54}$$

donde k_1 y k_2 son constantes de elasticidad. En este lagrangeano las coordenadas longitudinales y transversales aparecen desacopladas; luego, resulta lógico tratarlo como dos subsistemas separados:

$$L = L_l + L_t \quad (55)$$

donde:

$$L_l \equiv \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}k_1\{(x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2\} \quad (56)$$

$$L_t \equiv \frac{1}{2}m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}m_1 \dot{y}_3^2 - \frac{1}{2}k_2 l^2 \delta^2 \quad (57)$$

Si se elige el origen del sistema de coordenadas en el centro de masa de la molécula se cumple que:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_1 x_3 = 0 \quad (58)$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_1 y_3 = 0 \quad (59)$$

La condición (58) permite eliminar la coordenada x_2 del lagrangeano L_l :

$$L_l = \frac{1}{2}m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_3) \quad (60)$$

$$- \frac{1}{2}k_1\left\{\left(x_1 - \frac{m_1}{m_2}(x_1 + x_3)\right)^2 + \left(x_3 - \frac{m_1}{m_2}(x_1 + x_3)\right)^2\right\} \quad (61)$$

Si además se definen nuevas variables: $q_a = x_1 + x_3$ y $q_b = x_1 - x_3$, el lagrangeano L_l se escribe como:

$$L_l = \frac{M}{4}\frac{m_1}{m_2}\dot{q}_a^2 + \frac{m_1}{4}\dot{q}_b^2 - \frac{k_1}{4}\frac{M^2}{m_2^2}q_a^2 - \frac{k_1}{4}q_b^2 \quad (62)$$

donde, $M = 2m_1 + m_2$. Claramente, la forma del lagrangeano L_l indica que las coordenadas q_a y q_b son las coordenadas normales para las vibraciones longitudinales. En efecto, las ecuaciones de movimiento para cada una de ellas corresponden a osciladores armónicos de frecuencias $\omega_a = \sqrt{k_1 M/m_1 m_2}$ y $\omega_b = \sqrt{k_1/m_1}$ respectivamente.

Utilizando (59) y la simetría del desplazamiento de los átomos ($y_1 = y_3$) en la única oscilación transversal posible (Figura 1.2), se tiene que el lagrangeano L_t se escribe como

$$L_t = \frac{m_1 m_2}{4M} l^2 \dot{\delta}^2 - \frac{1}{2}k_2 l^2 \delta^2 \quad (63)$$

Donde δ es una coordenada generalizada igual a: $\pi - \angle ABC$; tal que, $\tan \delta = y_2 - y_3/l$ donde l es la distancia de equilibrio entre dos átomos vecinos de la molécula. La ecuación de movimiento asociada al lagrangeano (63) es la de un oscilador armónico simple de frecuencia $\omega_t = \sqrt{2 k_2 M/m_1 m_2}$.