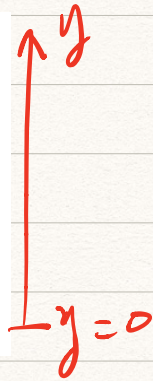
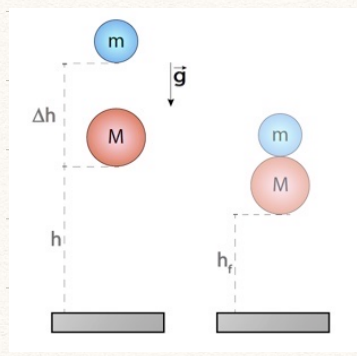


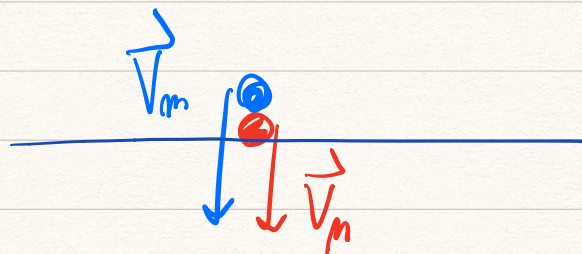
F11000 - Otoño 2021 - Control 2

Pauta P1



Fijamos la referencia de altura en el suelo.

- Justo antes de llegar al suelo las partículas tienen velocidades $\vec{v}_m$ y $\vec{v}_M$ como en la figura



Sus módulos se pueden calcular con la conservación de la energía mecánica por la única fuerza involucrada es la gravedad que es

conservativa, luego para M

$$E_i = E_f \quad [1.0 \text{ pts}]$$

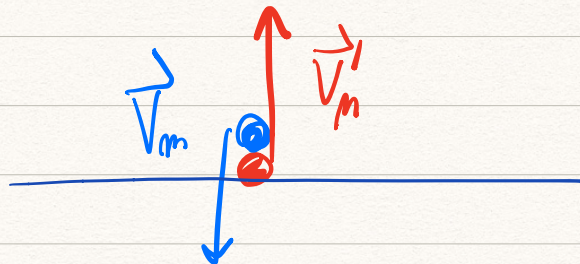
$$Mgh = \frac{1}{2} M V_m^2 + \cancel{Mg0} = 0$$

$$V_m = \sqrt{2gh} \quad [0.5 \text{ pts}]$$

Igualmente

$$V_m = \sqrt{2gh} \quad [0.5 \text{ pts}]$$

- Después del rebote con el piso la velocidad de M se invierte pero con el mismo módulo y queda:



- Ahora las partículas se juntan a nivel del suelo y suben unida. Este proceso solo involucra fuerzas internas por lo que se conserva el momento.

Con y hacia arriba se tiene.

$$M\sqrt{2gh} - m\sqrt{2gh} = (m+M)V$$

[1.0 pts]

Donde V es la velocidad de la masa compuesta.

$$V = \frac{(M-m)\sqrt{2gh}}{(M+m)}$$

[1.0 pts]

- Finalmente podemos usar la conservación de la energía mecánica para encontrar hf .

$$E_i = E_f$$

[1.0 pts]

$$(m+M) \cdot g \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(M-m)^2}{(M+m)^2} 2gh = \dots$$

$$\dots = (m+M) \cdot g \cdot h_f$$

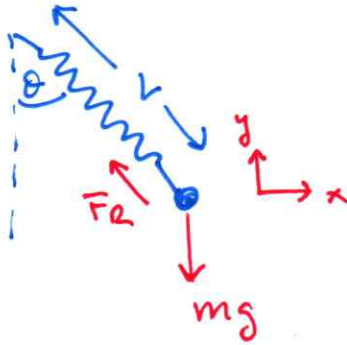
$$h_f = \frac{(M-m)^2}{(M+m)^2} h$$

[1.0 pts]

P2]

DCL m

0.5 puntos



$$L = l_0 + \Delta l$$

$$F_R = k \Delta l \quad (\text{Ley de Hooke})$$

$$x) -F_R \sin \theta = -m a_c \quad (1) \quad a_c = \frac{v^2}{r} = \text{aceleración centrípeta}$$

0.5 puntos

$$y) F_R \cos \theta - mg = 0$$

entonces
$$F_R = \frac{mg}{\cos \theta} \quad 0.5 \text{ puntos}$$

Reemplazando en (1)

$$\frac{mg}{\cos \theta} \cdot \sin \theta = m \frac{v^2}{r} \quad 0.5 \text{ puntos}$$

pero $v = \omega r$ entonces

$$g \tan \theta = \omega^2 r \Rightarrow r = \frac{g}{\omega^2} \tan \theta \quad 0.5 \text{ puntos}$$

De la geometría del problema



$$\sin \theta = \frac{r}{L} \Rightarrow L = \frac{r}{\sin \theta} \quad 0.5 \text{ puntos}$$

entonces

$$l_0 + \Delta l = \frac{g}{\omega^2 \cos \theta} \quad (3) \quad 0.5 \text{ puntos}$$

pero $\Delta l = \frac{\overline{F_R}}{k} = \frac{mg}{k \cos \theta}$ 0.5 puntos

$\Rightarrow l_0 = \frac{g}{\omega^2 \cos \theta} - \Delta l$

$$l_0 = \frac{g}{\cos \theta} \left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{m}{k} \right]$$

Por lo tanto

$$\cos \theta = \frac{g}{l_0} \left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{m}{k} \right]$$

1 punto

Reemplazando en (3)

$$L = \frac{g}{\omega^2 \cos \theta} = \frac{l_0}{\omega^2 \left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{m}{k} \right]}$$

∴

$$L = \frac{l_0}{1 - \frac{m}{k} \omega^2}$$

1 punto

a) 4.0 p

b) 2.0 p

F11000 - Otoño 2021 - Control 2

Pauta P3

(a) Para esta situación se tiene fuerzas conservativas y no-conservativas. Usando el Teorema del trabajo-Energía cinética tenemos que:

Extremo superior del plano inclinado

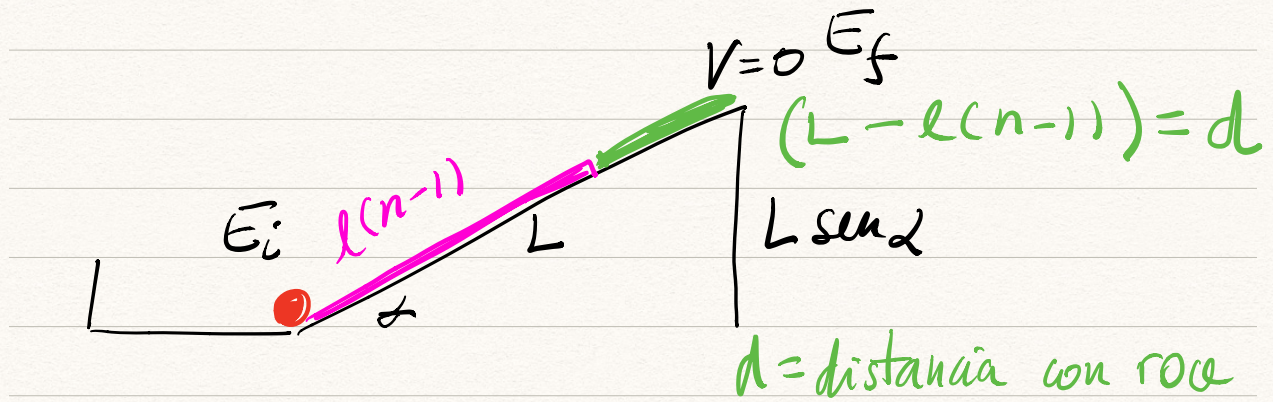
base del plano inclinado

$$E_f = E_i + W_p + W_R \quad (1)$$

trabajo
de los propulsores
 $W_p > 0$

[0.5 pts]
trabajo de
roce
 $W_R < 0$

Ponemos la referencia de altura en el suelo y evaluamos cada una de las partes de la ecuación (1)



$$E_i = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad (2) \quad [0.5 \text{ pts}]$$

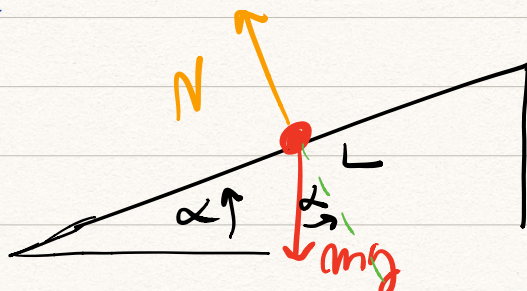
$$E_f = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + mg L \sin \alpha \quad (3) \quad [0.5 \text{ pts}]$$

$= 0$

$$W_p = n \Delta E \quad (4) \quad [0.5 \text{ pts}]$$

$$W_k = -d f_r = -(L - (n-1)L) f_r$$

Necesitamos calcular la fuerza de roce



$$N - mg \cos \alpha = 0$$

$$N = mg \cos \alpha$$

$$y \quad f_r = \mu N$$

$$f_r = \mu mg \cos \alpha$$

Juntando todo se tiene

$$W_R = -(L - (n-1)l) \mu mg \cos \alpha \quad (5)$$

[1.0 pts]

Con (2), (3), (4) y (5) en (1)

$$mgL \sin \alpha = \frac{1}{2} k \Delta l^2 + n \Delta E - (L - (n-1)l) \mu mg \cos \alpha$$

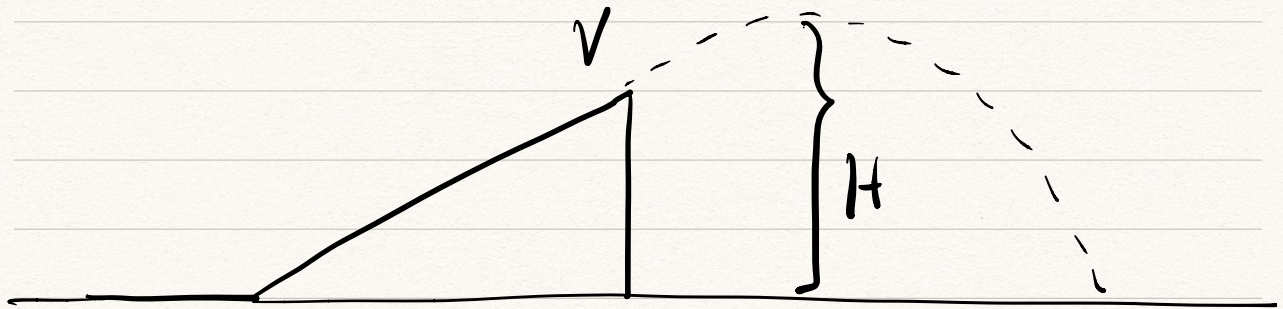
Ahora despejamos l

[0.5 pts]

$$l = \frac{mgL \sin \alpha - \frac{1}{2} k \Delta l^2 - n \Delta E + L \mu mg \cos \alpha}{(n-1) \mu mg \cos \alpha}$$

[0.5 pts]

(b) Ahora queremos que los propulsores entreguen una $\Delta E'$ tal que tengamos energía cinética necesaria para subir una altura H .



Definimos $\Delta E' = \Delta E + \delta E$ (6)

donde ΔE es la energía del caso (a) justa para llegar al extremo inferior con $v=0$ y δE la adicional de cada propulsor.

En esta nueva situación (1) se cumple pero le agregamos algunos términos:

$$\boxed{E_f + \frac{1}{2}mv^2 = E_i + W_p + n \cdot \delta E + W_R}$$

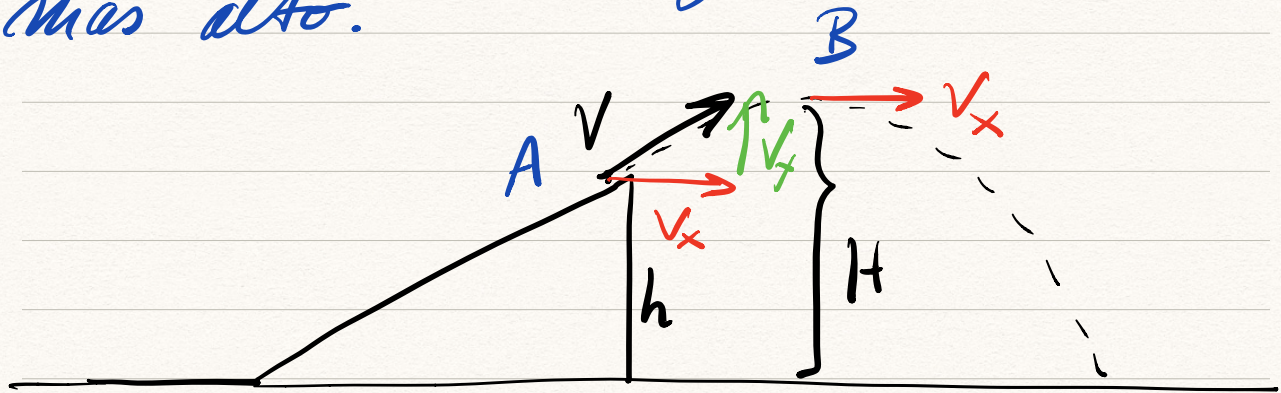
[0.5 pts] (7)

↓
Los términos en verde se cancelan por (1), luego

$$\boxed{\delta E = \frac{1}{2} \frac{mv^2}{n}} \quad (2)$$

Solo falta encontrar v para que la masa llegue a H.

Como solo actúa la gravedad se conserva la energía mecánica entre el extremo y el punto más alto.



$v_y = 0$ en punto más alto.

$$E_A = E_B$$

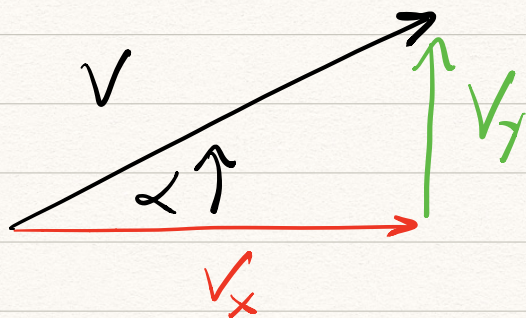
$$\cancel{\frac{1}{2}m(V_x^2 + V_y^2)} + mgh = \cancel{\frac{1}{2}mV_x^2} + mgH$$

$$\cancel{\frac{1}{2}mV_y^2} = \cancel{mg(H-h)}$$

$$V_y = \sqrt{2g(H-h)} \quad (9)$$

[0.5 pts]

Ahora relacionamos V con V_y



$$V_y = V \sin \alpha \Leftrightarrow$$

$$V = \frac{V_y}{\sin \alpha} \quad (10)$$

con (9) y (10) en (8)

[0.5 pts]

$$\delta E = \frac{1}{2} \frac{m}{n} \frac{2g(H-h)}{\sin^2 \alpha}$$

$$\delta E = \frac{mg(H-h)}{n \sin^2 \alpha} \quad (11)$$

finalmente con (11) en (6)

$$\Delta E' = \Delta E + \frac{mg(H-h)}{n \sin^2 \alpha}$$

[0.5 pts]

Nota: En la parte (b) puede haber otros caminos, en particular para expresar $\Delta E'$, hay que considerar con cuidado estas posibilidades.