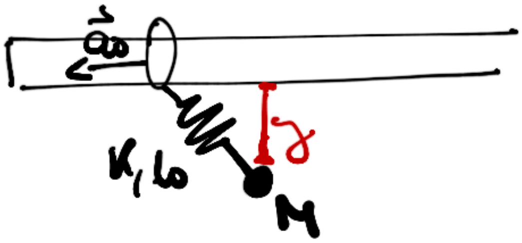
P3)

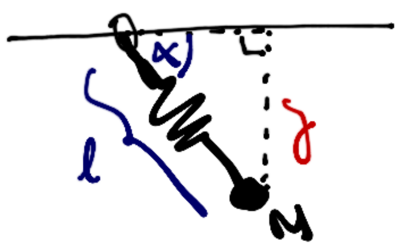
Tenemos una masa M colgando de un resorte (K, l_0) atado a un anillo en una barra infinita sin roce.

El anillo comienza moviendose con aceleración $\vec{a_0}$.



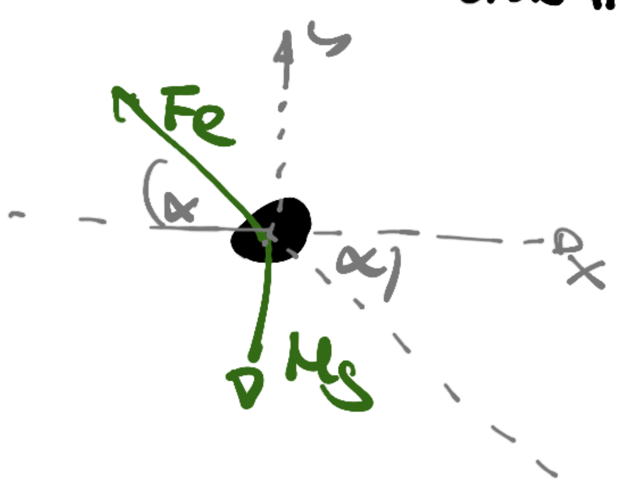
Queremos conocer la distancia entre la masa y la barra

Primero notemos que si tenemos el triángulo:



$$\boxed{y = l \operatorname{sen} \alpha}$$

Ahora, analizemos el DCL en la masa M



Fe = fuerza elástica del resorte

Mg = Peso de la masa.

Anotando la 2da ley de Newton para ambos ejes:

① $M a_y = \sum F_y = F_e \cos\alpha - Mg$

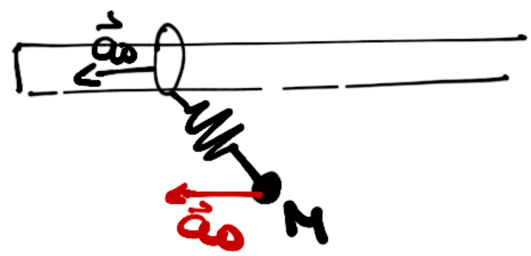
② $M a_x = \sum F_x = F_e \operatorname{sen}\alpha$.

Ahora hay que notar 1 cosa de este movimiento que no se dice en el enunciado

El resorte no está oscilando.

$\downarrow$

La masa M se mueve igual que el anillo.



Luego si M solo se mueve en el eje x :

$a_y = 0 \quad \wedge \quad a_x = -a_0$ (definimos el eje x positivo hacia la derecha)

Quedando:

① $\longrightarrow$ $F_e \operatorname{sen}\alpha - Mg = 0$

$$\boxed{F_e \operatorname{sen}\alpha = Mg} \quad *$$

② $\longrightarrow$ $\boxed{F_e \cos\alpha = -Ma_0} \quad **$

Tomando $(*)^2 + (**)^2$

$$(F_e \cos\alpha)^2 + (F_e \operatorname{sen}\alpha)^2 = (Mg)^2 + (Ma_0)^2$$

$$F_e^2 \underbrace{(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)}_{=1} = M^2 g^2 + M^2 a_0^2$$

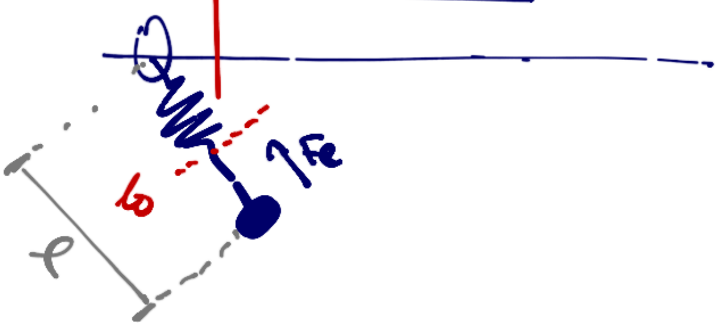
$$\boxed{F_e^2 = M^2(g^2 + a_0^2)} \quad ***$$

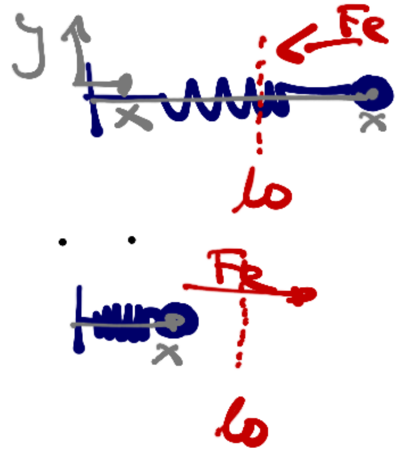
Para continuar con ** ¿Qué es Fe?.

Fe = Fuerza elástica de un resorte

$$\boxed{F_e = K(l - l_o)}$$

donde l_o = punto de equilibrio





$$F_e = K(x - l_o)$$

Siempre busca llevarte a l_o

Volviendo a ** $F_e^2 = K^2(l-l_o)^2$

$$\longrightarrow K^2(l-l_o)^2 = M^2(g^2 + a_o^2)$$

$$(l-l_o)^2 = \frac{M^2}{K^2}(g^2 + a_o^2)$$

$$l - l_o = \frac{M}{K}\sqrt{(g^2 + a_o^2)}$$

$$l = l_o + \frac{M}{K}\sqrt{(g^2 + a_o^2)}$$

Pero $y = l \operatorname{sen}\alpha$

y de ① $F_e \operatorname{sen}\alpha = Mg \longrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{Mg}{F_e}$

luego con $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{g}{\sqrt{g^2+a_0^2}}$

$$y = l \operatorname{sen}\alpha$$

$$y = \left(l_0 + \frac{M}{K}\sqrt{g^2+a_0^2}\right)\cdot\left(\frac{g}{\sqrt{g^2+a_0^2}}\right)$$

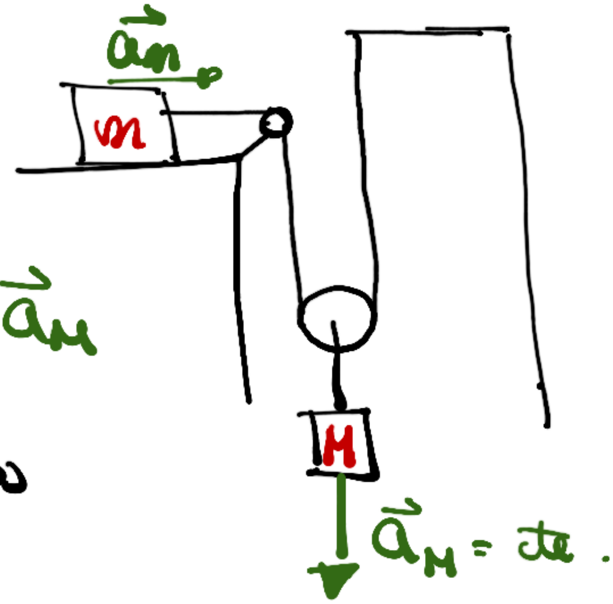
$$\boxed{y = \frac{l_0}{\sqrt{g^2+a_0^2}} + \frac{Mg}{K}}$$

distancia de la masa a la barra.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{Mg}{k(l-l_0)} = \frac{Mg}{k\cdot\frac{M}{k}\sqrt{g^2+a_0^2}} = \frac{g}{\sqrt{g^2+a_0^2}}$$

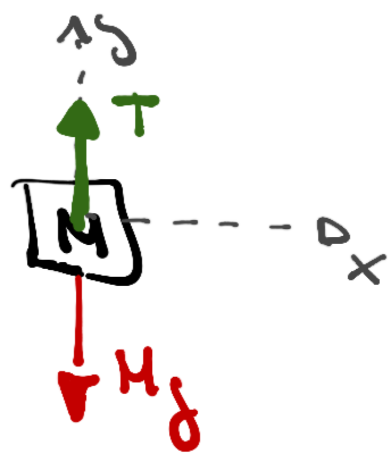
P2)

Tenemos el siguiente sistema:



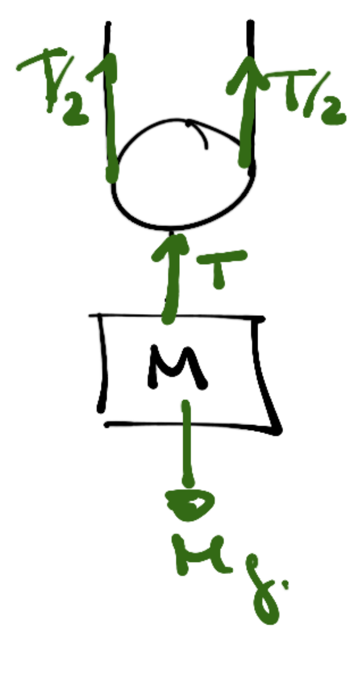
Queremos saber el valor de $\vec{a}_M$

Para ello primero obtenemos los DCL de ambos masas:

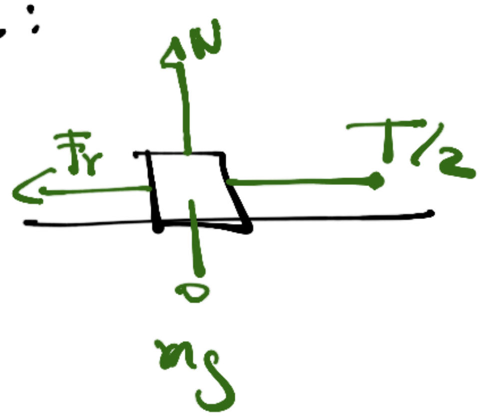


Donde T es la fuerza de tensión que ejerce la polea movil a M.

Esta T, se divide en 2 cuando comienzan las dos cuerdas.



Para m:



Fr: fuerza de roce
$= |N| \mu$

Con estos 2 DCL usemos la 2da ley de Newton

Para M:

$$Ma_{My} = T - Mg$$

$a_{My} = -a_M$

que estamos buscando

$$Ma_{Mx} = 0$$

$$\boxed{-Ma_M = T - Mg} \; *$$

Para m:

no sube ni baja.

$$m\cancel{a_{my}}^{0} = N - mg \longrightarrow \boxed{N = mg} \; **$$

$$ma_{mx} = -F_r + T/2 \longrightarrow \boxed{-ma_m = -F_r + \frac{T}{2}} \; ***$$

y $a_{mx} = a_m$ del primer dibujo.

Anotemos nuestras 3 ecuaciones:

$$* \quad \boxed{-Ma_M = T - Mg}$$

$$** \quad \boxed{N = mg}$$

$$*** \quad \boxed{-ma_m = -Fr + T/2}$$

como $Fr = |N|\mu$

estamos en movimiento

$\mu = \mu_k$

y usando **

$|N| = mg$

$Fr = mg\,\mu_k$

luego la ecuacion *** queda:

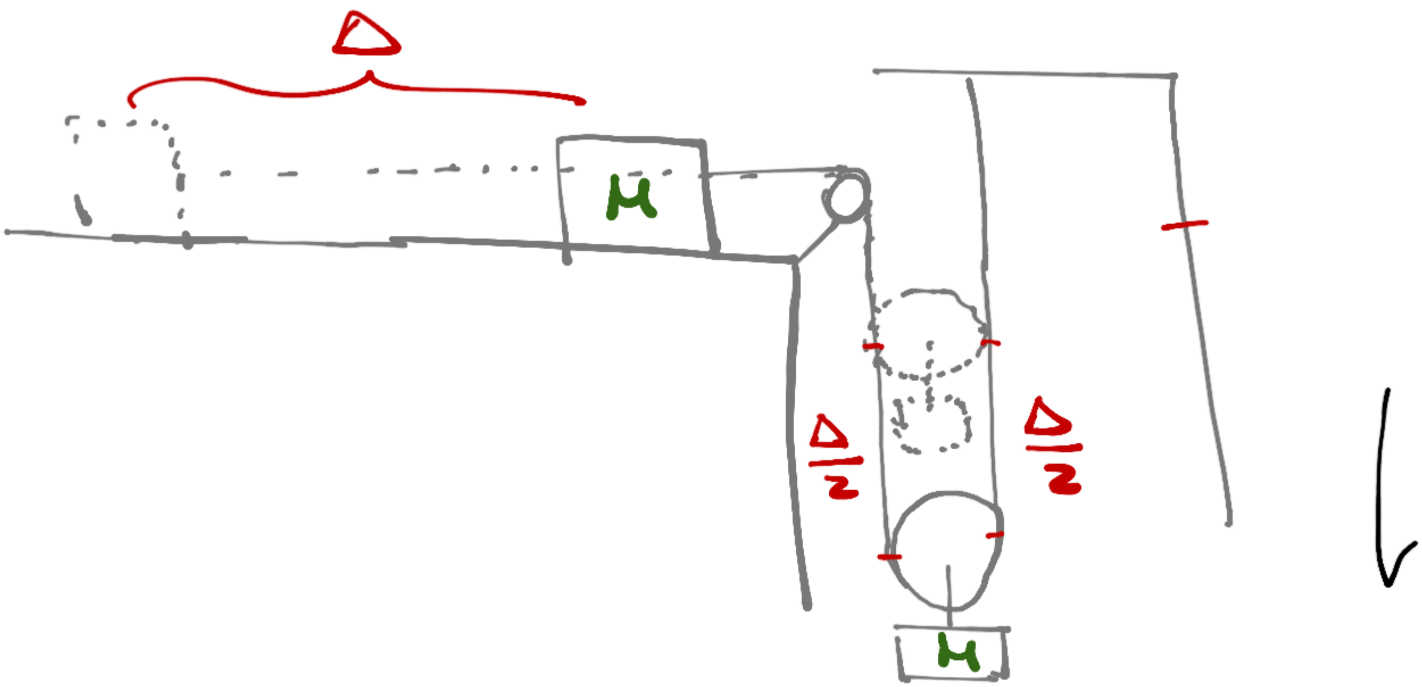
$$\boxed{-ma_m = -mg\mu_k + T/2} \quad ****$$

Ahora toca el paso más importante del problema.

$$\boxed{|a_m| = 2|a_M|}$$

entendamos por qué:

cuando m se mueve una distancia Δ



M solo bajará la mitad $\longrightarrow$ $\frac{\Delta}{2}$.

Con este dato: $a_m = 2a_M$.

$*$: $-Ma_M = T - Mg \quad (1)$

$**$: $\underbrace{m a_m = -\mu_k mg + T/2}$

$$+2ma_M = -\mu_k mg + T/2 \quad (2)$$

Tomando $(1) - 2\cdot(2)$

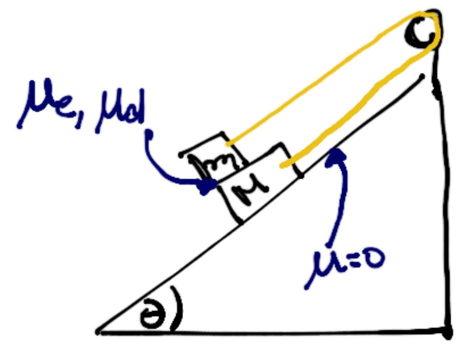
Anode: $-Ma_M - 4ma_M = \cancel{T} - Mg + 2\mu_k mg - \cancel{T}$

$$-a_M(4m+M) = -Mg + 2\mu_k mg$$

$$\boxed{a_M = \frac{g(2\mu_k m - M)}{-(4m+M)}}$$

P1)

Tenemos el siguiente problema:

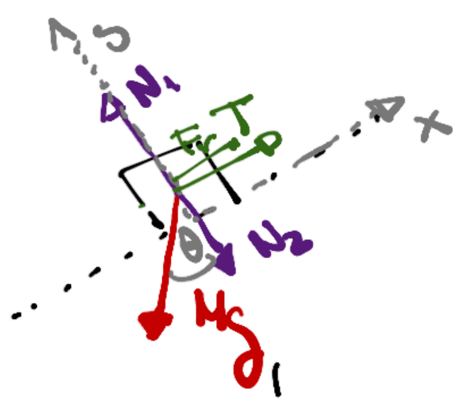


- 2 bloques de masa m, M
- 1 polea fija
- no hay roce en la superficie bajo M
- hay roce entre m y M.

a) Queremos el valor máximo de $\frac{M}{m}$ tal que el sistema quede en reposo.

Primero realizamos los DCL

Para M:



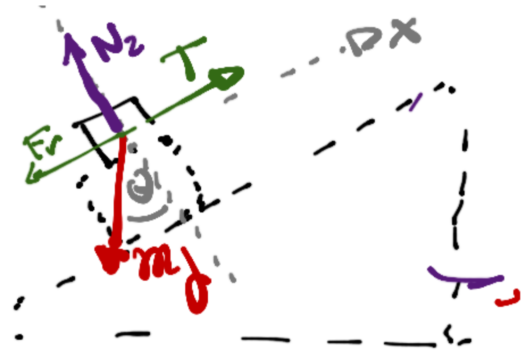
N_1 es la normal ejercida por el piso

N_2 es la normal ejercida por la superficie entre m y M

T = Tensión de la cuerda

Fr = roce con m.

Para m:



Fr va hacia el otro sentido.

Con esto anotemos la 2da ley de Newton para ambas masas.

$$① \; Ma_{Mx} = T + F_r - Mg\, sen\theta$$
$$② \; Ma_{My} = N_1 - N_2 - Mg\cos\theta$$
Para M

$$③ \; m\, a_{mx} = T - F_r - mg\, sen\theta$$
$$④ \; m\, a_{my} = N_2 - mg\cos\theta$$
Para m

Ahora notemos que NUNCA los bloques se elevarán:

$$a_{my} = 0$$
$$a_{My} = 0$$
NO EXISTE ACELERACIÓN EN EL EJE Y.

Con esto ② y ④ nos quedan

⑤ $0 = N_1 - N_2 - Mg\cos\theta$

$0 = N_2 - mg\cos\theta \longrightarrow \boxed{N_2 = mg\cos\theta}$ ⑥

Reemplazando en ⑤

$0 = N_1 - mg\cos\theta - Mg\cos\theta$

$\boxed{N_1 = (m+M)g\cos\theta}$ ⑦

Además recordando como esta fuerza de roce:

$Fr = \mu \cdot |N|$

En este caso
la normal que está relacionada con el roce es N_2

$$Fr = \mu \cdot N_2$$ Usando (6)

$$\boxed{Fr = \mu \cdot mg\cos\theta} \quad (8)$$

Volviendo a (1) y (3):

(1) $Ma_{Mx} = T + Fr - Mg\,\text{sen}\theta$

(3) $ma_{mx} = T - Fr - mg\,\text{sen}\theta$

Reemplazamos (8)

$$\boxed{\begin{aligned} Ma_{Mx} &= T + \mu mg\cos\theta - Mg\,\text{sen}\theta \\ ma_{mx} &= T - \mu mg\cos\theta - mg\,\text{sen}\theta \end{aligned}} \quad *$$

Pero queremos que no se muevan $\longrightarrow$ $a_{Mx} = 0$

$a_{mx} = 0$

$$0 = T + \mu mg\cos\theta - Mg\,\text{sen}\theta \quad (10)$$

y $0 = T - \mu mg\cos\theta - mg\,\text{sen}\theta$ (II)

Restamos (I) - (II)

$$0 = +2\mu mg\cos\theta - Mg\,\text{sen}\theta + mg\,\text{sen}\theta$$

$$M\cancel{g}\,\text{sen}\theta = m\cancel{g}(\text{sen}\theta + 2\mu\cos\theta)$$

Colocamos μ_e, ya que el sistema está estático!

$$\boxed{\frac{M}{m} = \frac{(\text{sen}\theta + 2\mu_e\cos\theta)}{\text{sen}\theta}}$$

Hay solo un valor y es este.

b) Ahora los bloques se mueven, es decir volvemos a las ecuaciones ✱ con μ_d ya que se mueve.

$$\boxed{\begin{aligned} Ma_{mx} &= T + \mu_d mg\cos\theta - Mg\,\text{sen}\theta \\ ma_{mx} &= T - \mu_d mg\cos\theta - mg\,\text{sen}\theta \end{aligned}}$$

Queremos el valor de a_{mx} y T:

Notemos algo ¿Existe relación entre a_{Mx} y a_{mx}?

Si M avanza, m retrocede, y lo hacen a la misma magnitud de aceleración, sino uno retrocedería más que la otra

$$\longrightarrow \quad a_{Mx} = -a_{mx}.$$

Llamemos simplemente a $\boxed{a_{Mx} = a}$

$$\longrightarrow \boxed{a_{mx} = -a}$$

Con esto las ecuaciones quedan:

$$Ma = T + \mu_d mg\cos\theta - Mg\sin\theta \quad (12)$$

$$-ma = T - \mu_d mg\cos\theta - mg\sin\theta \quad (13)$$

Restando (12) - (13)

$$(M+m)a = +2\mu_d\, mg\cos\theta - (M-m)g\,\text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{a = \frac{+2\mu_d\, mg\cos\theta - (M-m)g\,\text{sen}\,\theta}{(M+m)}}$$

¡La aceleración!

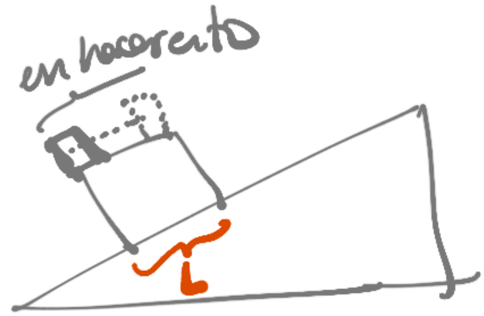
Para obtener T (12) + (13)

$$(M-m)a = 2T - (M+m)g\,\text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\left((M-m)a + (M+m)g\,\text{sen}\,\theta\right)}$$

colocando el valor obtenido por a, obtenemos T.

c) Queremos calcular un tiempo. El tiempo en que el bloque m pasa de un extremo al otro



Para obtener el tiempo notemos que ya sabemos la aceleración de m : -a

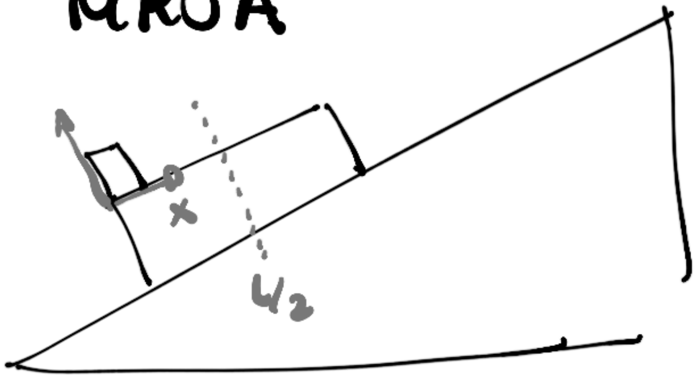
$$a_m = \frac{-2\mu_d\, mg\cos\theta + (M-m)\, g \operatorname{sen}\theta}{m+M}$$

y tiene que recorrer todo el bloque de masa M, que tiene largo L.

De este largo L, solo necesita recorrer $\frac{L}{2}$, ya que al recorrer $\frac{L}{2}$, M bajará $\frac{L}{2}$ también.

Es decir debemos calcular el tiempo que demora m con aceleración a_m en recorrer $\frac{L}{2}$

Esto es un MRUA



$$\overset{L/2}{\cancel{x}} = \overset{\text{es } 0}{\cancel{x_0}} + \overset{\text{es } 0}{\cancel{v_0}}t + \frac{\overset{a_m}{a}t^2}{2}$$

$$\frac{L}{2} = \frac{a_m t^2}{2}$$

nos quedamos con la raíz positiva $t>0$.

$$t^2 = \frac{L}{a_m} \longrightarrow \boxed{t = +\sqrt{\frac{L}{a_m}}}$$