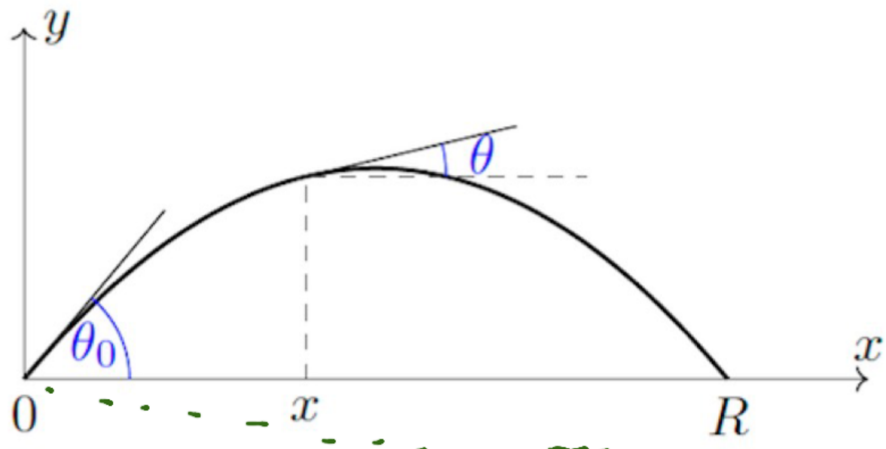
Pauta Aux 3

P1)

Tenemos un proyectil lanzado con un ángulo de elevación θ_0 y alcance R.



Primero nos hacen demostrar que

$$y(x) = -\left(\frac{\tan\theta_0}{R}\right)x^2 + x\tan(\theta_0)$$

Para ello, notemos algo que sabemos: la ecuación itinerario

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + a_y\frac{t^2}{2}$$

ver dibujo

El sistema esta fijado con $\boxed{y_0 = 0}$, además, la aceleración será la de gravedad, ya que no hay otra fuerza actuando

$$\longrightarrow \quad y(t) = (V_{oy})t - g\frac{t^2}{2}$$

Ahora esta ecuación es $y(t)$, y queremos $y(x)$.
Para ello, anotemos primero la ecuación $x(t)$

$$x(t) = x_0 + V_{ox}t + a_x\frac{t^2}{2}$$

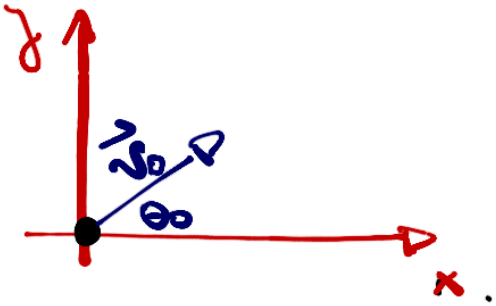
Aquí, nuevamente $x_0 = 0$, pero aquí la aceleración $a_x = 0$, ya que no hay fuerzas en el eje x. (en el eje y si hay una fuerza, la fuerza de gravedad).

$$\longrightarrow \quad x(t) = V_{ox}t$$

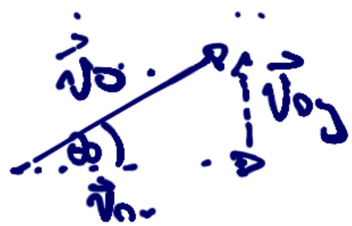
Para continuar, determinemos estas velocidades iniciales V_{oy} y V_{ox}.

Para ello comenzemos con el inicio del lanzamiento.

Tiene que haber sido un lanzamiento con velocidad llamemosla $\vec{v}_0$, con un angulo θ_0



Esta velocidad, la podemos descomponer en los ejes x e y



$$\begin{cases} v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \\ v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \end{cases}$$

Con esto

$$y(t) = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 \, t - g\frac{t^2}{2} \qquad (1)$$

$$x(t) = v_0 \cos\theta_0 \, t \qquad (2)$$

Despejamos en (2) el tiempo:

$$x = V_0 \cos\theta_0 t \longrightarrow t = \frac{x}{V_0 \cos\theta_0} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (1)

$$y = V_{0y} t - g\frac{t^2}{2}$$

$$= \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cdot x}{V_0 \cos\theta_0} - \frac{g\left(\frac{x}{V_0\cos\theta_0}\right)^2}{2}$$

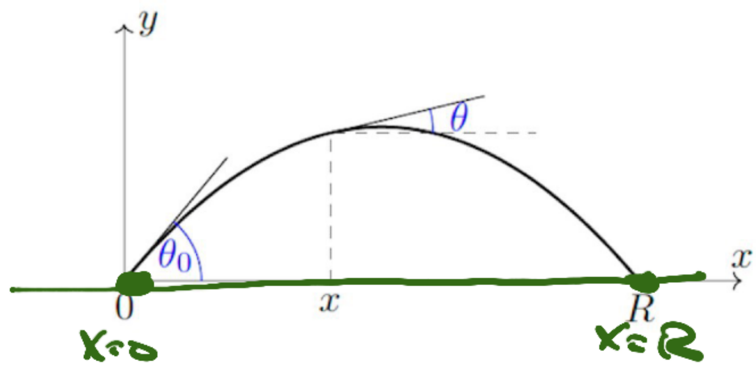
$$y = x \tan\theta_0 - x^2 \frac{g}{2V_0^2 \cos\theta_0^2} \quad (4)$$

Estamos cerca, nos falta introducir R, el cual es la maxima posición en x.

¿Cuando ocurre esto?

Si vemos el gráfico, cuando $y = 0$, x puede ser 2 valores $\begin{cases} x = 0 \\ x = R \end{cases}$

Evaluando $y=0$ en (4)
$x=R$



$$0 = R\tan\theta_0 - \frac{R^2 g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}$$

$$\frac{R^{\cancel{2}} g}{2v_0^2\cos^2\theta_0} = \cancel{R}\tan\theta_0$$

$$\boxed{R = \frac{2v_0^2\cos^2\theta_0\tan\theta_0}{g}}$$

Volviendo a (4)

$$y = x\tan\theta_0 - x^2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}$$

$$= \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\cdot\frac{\tan\theta_0}{\tan\theta_0}$$

$$= \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0\tan\theta_0}\cdot\tan\theta_0$$

$$= \frac{1}{R}\tan\theta_0$$

luego $$\boxed{y = x\tan\theta_0 - x^2\frac{\tan\theta_0}{R}} \quad (S)$$

que era lo que queríamos!

notemos que $\tan\theta_0$ es una constante, llamémosla c_1, lo mismo para $\frac{\tan\theta_0}{R}$, y llamémosla c_2

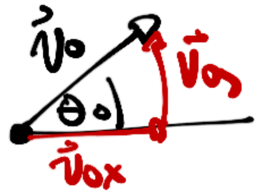
luego $$\boxed{y = c_1 x - c_2 x^2}$$

la ecuación cuadrática!
una parabola.

b) Queremos demostrar que:

$$\tan\theta = \left(1 - \frac{2x}{R}\right)\tan(\theta_0)$$

Para ello, recordemos como determinamos V_{ox}, V_{oy}



$$\tan\theta_o = \frac{V_{oy}}{V_{ox}}$$

Con el angulo θ, ocurre lo mismo, pero son otras velocidades, que dependen del angulo:

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x} \quad (6)$$

Para esto, recordemos la ecuacion para la rapidez:

$$\underbrace{V = V_o + at}$$

$$V_y = V_{oy} + a_y t$$

ya dijimos que es $-g$

$$V_x = V_{ox} + a_x t$$

es 0.

$$\longrightarrow V_y = V_{oy} - gt \qquad V_x = V_{ox}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt \qquad (7)$$

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 \qquad (8)$$

Con esto:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0 - gt}{v_0 \cos\theta_0}$$

$$= \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta_0}{v_0 \cos\theta_0} - \frac{gt}{v_0 \cos\theta_0}$$

$$= \tan\theta_0 - \frac{gt}{v_0 \cos\theta_0}$$

pero recordemos que de (3)

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$$

Queda:

$$\tan\theta = \tan\theta_0 - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\theta_0}$$

Por último recordamos $R = 2v_0^2\cos^2\theta_0\tan\theta_0$

$$\tan\theta = \tan\theta_0 - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\theta_0}\cdot\frac{2\tan\theta_0}{2\tan\theta_0}$$

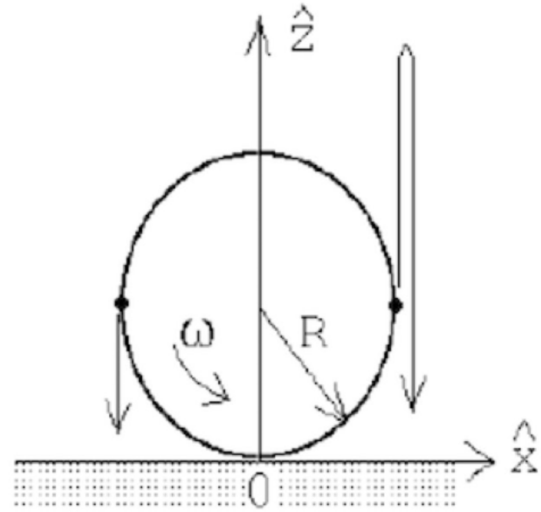
$$= \tan\theta_0 - x\cdot 2\tan\theta_0\cdot\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0\tan\theta_0}$$

$$= \tan\theta_0 - \frac{2x\tan\theta_0}{R}$$

$$= \tan\theta_0\left(1 - \frac{2x}{R}\right)$$

P2)

Tenemos esta rueda que gira con $\omega = 30$ rpm



Primero pasemos esto a $\left(\frac{rad}{s}\right)$

$$30 \text{ rpm} = 30 \frac{\text{vueltas}}{1 \text{min}}$$
$$= 30 \frac{\text{vueltas}}{60 \text{ s}}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\text{vuelta}}{\text{s}} = \frac{1}{2} 2\pi \left(\frac{rad}{s}\right) = \boxed{\pi \left(\frac{rad}{s}\right) = \omega}$$

1 vuelta = 2π rad.

Ya con $\omega = \pi \left(\frac{rad}{s}\right)$, resolvemos el problema:

Queremos determinar el R de la rueda.

Para ello nos dicen que entre la llegada de la primera piedra y la segunda, la rueda dio una vuelta.

es decir:

$$\Delta t_p = T_c$$

Tiempo entre piedras.

Tiempo en dar una vuelta o ciclo

Obtengamos T_c :

Es un movimiento circular, luego sabemos que su periodo es $T_c = \frac{2\pi}{\omega}$

Pero otra forma de verlo es la siguiente:

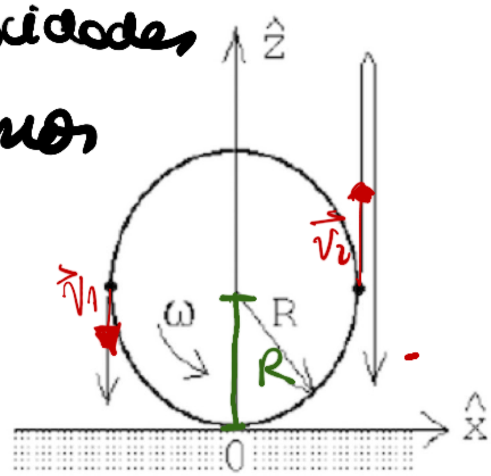
Su velocidad angular es $\omega = \pi \left(\frac{rad}{s}\right)$, es decir, cada segundo avanza π (rad). La vuelta entera son 2π (rad), luego demora 2 seg

$$\boxed{T_c = 2\,(s)}$$

Ahora debemos determinar Δt_p

Para ello volvamos al dibujo:

Ambas piedras saldrán con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, luego de esto tendremos un MRUA de caída libre!



Si determinamos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, luego podemos tener ecuaciones itinerario para ambas piedras

Para ello, recordemos que era un MCU:

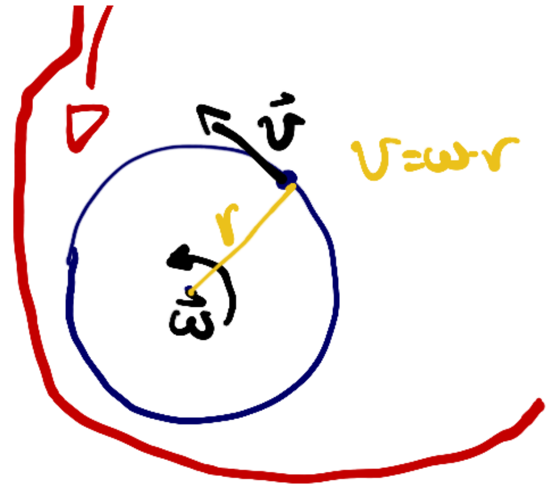
1) a_c = aceleración centrípeta $= \dfrac{v^2}{r} = r\omega^2$

2) $\omega = \dfrac{v}{r} \longrightarrow v = r\omega$

ω = rapidez angular

v = rapidez tangencial.

Ahora usaremos solo 2)



$$v = \omega r$$

en este caso el radio $= R$

$$\boxed{v = \omega R}$$

esto será la rapidez de ambas piedras al salir, la diferencia es que V_1 va hacia abajo y V_2 hacia arriba, y en el sistema de referencia z, x de la imagen, abajo es negativo y arriba positivo.

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= -\omega R \\ v_2 &= \omega R \end{aligned}}$$

Ahora con v_1, v_2, usemos la ecuación itinerario, para la piedra 1 lo describió z_1, se la piedra 2 z_2:

$$z_1 = z_{10} + v_1 t + \frac{a_1 t^2}{2}$$

$$z_2 = z_{20} + V_2 t + \frac{a_2 t^2}{2}$$

Notemos que en el sistema de referencia

$$z_{10} = R = z_{20}$$

Además $a_1 = a_2 = -g$

luego:

$$z_1 = R - \omega R t - g\frac{t^2}{2}$$

$$z_2 = R + \omega R t - g\frac{t^2}{2}$$

Ahora si calculamos el tiempo que demora en llegar la piedra 2, llamemosle t_2, y le restamos el tiempo que demora la piedra 1, llamemoslo t_1, obtendremos $\Delta t_p = t_2 - t_1$

$\rightarrow$ t_2 ocurre cuando $\boxed{z_2 = 0}$

Imponiendo esto:

$$z_2 = R + \omega R t - \frac{g t^2}{2}$$

$$0 = R + \omega R t_2 - \frac{g t_2^2}{2} \qquad (\cdot -1)$$

$$0 = \frac{g t_2^2}{2} - \omega R t_2 - R \qquad \left(\cdot \frac{2}{g}\right)$$

$$0 = t_2^2 - \frac{2\omega R}{g} t_2 - \frac{2R}{g}$$

Es una ecuación cuadrática, tendrá 2 soluciones, pero nos quedaremos con la solución físicamente posible, es decir $\boxed{t_2 > 0}$

$$t_2 = \frac{\frac{2\omega R}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{2\omega R}{g}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2R}{g}}}{2}$$

$$\boxed{t_2 = \frac{\frac{2\omega R}{g} + \sqrt{\left(\frac{2\omega R}{g}\right)^2 + \frac{4 \cdot 2R}{g}}}{2}}$$

Ahora obtengamos t_1:

Ocurre cuando $\boxed{z_1 = 0}$

$$0 = R - \omega R t_1 - \frac{g t_1^2}{2} \quad (-1)$$

$$0 = \frac{g t_1^2}{2} + \omega R t_1 - R \quad \left(\frac{2}{g}\right)$$

$$= t_1^2 + \frac{2\omega R}{g} t_1 - \frac{2R}{g}$$

haremos lo mismo que con t_2

$$t_1 = \frac{-\frac{2\omega R}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{2\omega R}{g}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2R}{g}}}{2}$$

$$\boxed{t_1 = \frac{-\frac{2\omega R}{g} + \sqrt{\left(\frac{2\omega R}{g}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2R}{g}}}{2}}$$

Ahora $\Delta t_p = t_2 - t_1$

$$= \frac{\frac{2\omega R}{g} + \cancel{\sqrt{\left(\frac{2\omega R}{g}\right)^2 + \frac{4\cdot 2R}{g}}}}{2}$$

$$- \left(\frac{-\frac{2\omega R}{g} + \cancel{\sqrt{\left(\frac{2\omega R}{g}\right)^2 + \frac{4\cdot 2\cdot R}{g}}}}{2} \right)$$

$$= \frac{2\omega R}{2g} + \frac{2\omega R}{2\cdot g}$$

$$\boxed{\Delta t_p = \frac{2\omega R}{g}}$$

Por ultimo igualamos a T_c y despejamos R

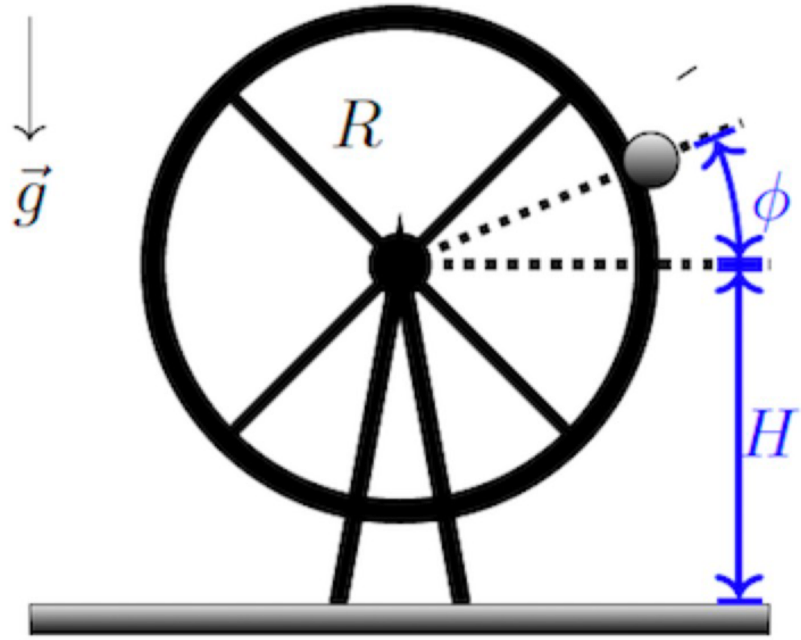
$$\Delta t_p = T_c$$

$$\frac{\cancel{2}\omega R}{g} = \cancel{2}$$

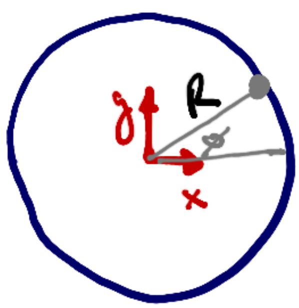
$$\boxed{R = \frac{g}{\omega}}$$

P3)

Tenemos a este niño que gira en esta rueda con ω, y que en el instante de la foto se le suelta el teléfono.



Para resolver el problema fijemos nuestro sistema de coordenadas al centro de la rueda

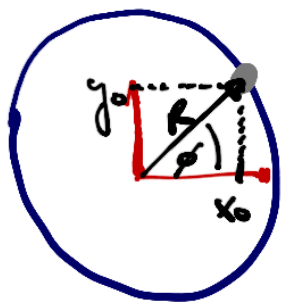


Primero notemos que antes de que se suelte el celular, el niño junto a su celular giran con rapidez angular ω, es decir, como vimos en el P2), Tiene rapidez Tangencial $v = \omega R$.

Luego cuando se suelte el telefono tendremos un movimiento en 2 dimensiones.

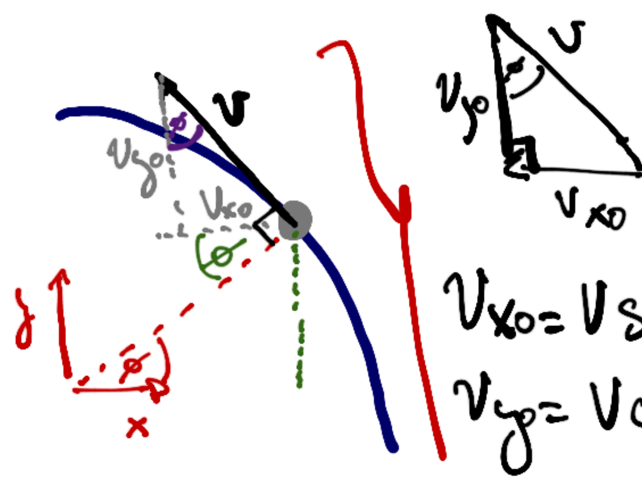
Para analizar este movimiento vemos lo que sucede en x e y:

1) La posición inicial antes de que se suelte será:



$$x_0 = R\cos\phi$$
$$y_0 = R\,\mathrm{sen}\phi$$

Por otra parte la velocidad inicial antes que se suelte



$$v_{x0} = v\,\mathrm{sen}\phi$$
$$v_{y0} = v\cos\phi$$

Con esto podemos tener nuestras ecuaciones itinerario:

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

$$X = X_0 + V_{x0}t + \frac{a_x t^2}{2}$$

Ya sabemos que $X_0 = R\cos\phi$
$y_0 = R\,sen\phi$

Con las velocidades debemos tener cuidado, ya que hay que considerar la dirección.

1) V_{y0} va hacia arriba $(+y)$ ⟶ $V_{y0} = V\cos\phi$

2) V_{x0} va hacia la izquierda $(-x)$ ⟶ $V_{x0} = -V\,sen\phi$

Ahora con las aceleraciones:

en x no hay ninguna fuerza ⟶ $\boxed{a_x = 0}$

en y está la gravedad, e indica hacia abajo $(-y)$ ⟶ $a_y = -g$

Nos queda:

$$y = R\,\text{sen}\,\phi + V\cos\phi\, t - g\frac{t^2}{2}$$

$$x = R\cos\phi - V\,\text{sen}\,\phi\, t$$

Recordemos que $V = \omega R$

$$y = R\,\text{sen}\,\phi + \omega R\cos\phi\, t - g\frac{t^2}{2}$$

$$x = R\cos\phi - \omega R\,\text{sen}\,\phi\, t$$

Ahora queremos la posición donde cae.

Claramente la posicion debe ser de una coordenada $y = -H$, ya que todos los puntos en el suelo tienen coordenada $y = -H$

Esto significa que si imponemos $y = -H$, podemos encontrar el tiempo en que caerá, luego este tiempo lo colocamos en $x(t)$ y tendremos la posición exacta.

$\rightarrow \boxed{y = -H}$

$$y = R\,\text{sen}\phi + \omega R \cos\phi\, t - g\frac{t^2}{2}$$

$$-H = R\,\text{sen}\phi + \omega R \cos\phi\, t_s - g\frac{t_s^2}{2}$$

$$0 = g\frac{t_s^2}{2} - \omega R \cos\phi\, t_s - (R\,\text{sen}\phi + H) \;/\cdot \frac{2}{g}$$

$$= t_s^2 - t_s \frac{2\omega R}{g}\cos\phi - \frac{2(R\,\text{sen}\phi + H)}{g}$$

$$\rightarrow t_s = \frac{\dfrac{2\omega R\cos\phi}{g} \pm \sqrt{\left(\dfrac{2\omega R}{g}\cos\phi\right)^2 + \dfrac{4\cdot 2(R\,\text{sen}\phi + H)}{g}}}{2}$$

Nos quedamos con la solución física $t_s > 0$

$$t_s = \frac{\frac{2\omega R\cos\phi}{g} + \sqrt{\left(\frac{2\omega R}{g}\cos\phi\right)^2 + \frac{4\cdot 2(R\,\mathrm{sen}\phi + H)}{g}}}{2}$$

→ Tiempo en caer al suelo!

Evaluando $x(t_s)$, tendremos la coordenada x en donde cayó el teléfono:

$$x(t_s) = R\cos\phi - \omega R\,\mathrm{sen}\phi \cdot t_s$$

$$x(t_s) = R\cos\phi - \omega R\,\mathrm{sen}\phi \cdot \left(\frac{\frac{2\omega R\cos\phi}{g} + \sqrt{\left(\frac{2\omega R}{g}\cos\phi\right)^2 + 4\cdot 2(R\,\mathrm{sen}\phi + H)}}{2} \right)$$

Luego el punto que buscamos es $(x(t_s), y(t_s))$

$$(x(t_s), -H)$$