Aux 1

P1)

constante de planck

Constante gravitacional

Velocidad de la luz

Tenemos 3 constantes: G, c y h

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11} \left[\frac{m^3}{Kg \cdot s^2}\right]$$

$$c = 3 \times 10^{8} \left[m/s\right]$$

$$h = 1{,}054 \times 10^{-34} \left[J \cdot s\right]$$

Queremos determinar una cantidad que dependa de las 3 constantes que tenga dimensiones de Longitud.

Para ello primero veamos las dimensiones de cada constante

$$[G] = \left[\frac{m^3}{Kg\, s^2}\right] = \left[\frac{L^3}{M T^2}\right]$$

longitud

masa

tiempo

$$[c] = [m/s] = \left[\frac{L}{T}\right]$$

$$[h] = [J \cdot s] = \left[\frac{Kg\, m^2}{s^2} \cdot s\right] = \left[\frac{M \cdot L^2}{T}\right]$$

$J =$

Ahora, para determinar una cantidad con dimensión de longitud, pongámonos en la combinación más genérica

$$\left[\begin{matrix}\text{cantidad}\\ \text{que buscamos}\end{matrix}\right] = [G]^{\alpha} \cdot [h]^{\beta} \cdot [c]^{\gamma}$$

Donde α, β, γ son constantes que determinaremos.

Recordemos que la dimensión de la cantidad buscada es L

$$\longrightarrow \quad L = [G]^{\alpha} [h]^{\beta} [c]^{\gamma}$$

$$= \left[\frac{L^3}{MT^2}\right]^{\alpha} \left[\frac{ML^2}{T}\right]^{\beta} \left[\frac{L}{T}\right]^{\gamma}$$

$$= \frac{L^{3\alpha}}{M^{\alpha} T^{2\alpha}} \cdot \frac{M^{\beta} L^{2\beta}}{T^{\beta}} \cdot \frac{L^{\gamma}}{T^{\gamma}}$$

$$L = \frac{L^{(3\alpha + 2\beta + \gamma)} \cdot M^{(\beta - \alpha)}}{T^{(2\alpha + \beta + \gamma)}}$$

Para que esto último sea verdad, debe ocurrir que solo puede L^1 al lado izquierdo, es decir, también debe quedar T^0 y M^0

$$\rightarrow \quad \left.\begin{aligned} L &= L^{(3\alpha+2\beta+\gamma)} \\ M^0 &= M^{(\beta-\alpha)} \\ T^0 &= T^{(2\alpha+\beta+\gamma)} \end{aligned}\right| \begin{aligned} 1 &= 3\alpha+2\beta+\gamma \quad (1) \\ 0 &= \beta-\alpha \quad (2) \\ 0 &= 2\alpha+\beta+\gamma \quad (3) \end{aligned}$$

Tenemos 3 ecuaciones, de la (2)

$$0 = \beta - \alpha \longrightarrow \boxed{\beta = \alpha}$$

Usando esta en la (3)

$$0 = 2\alpha + \beta + \gamma$$

$$0 = 2\alpha + \alpha + \gamma$$

$$\boxed{0 = 3\alpha + \gamma} \quad (4)$$

Usando $[\beta = \alpha]$ en la (1)

$$\boxed{1 = 5\alpha + \gamma} \quad (5)$$

Restando (5) - (4)

$$1 = 5\alpha + \gamma - (3\alpha + \gamma)$$

$$1 = 2\alpha \longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$\downarrow [\alpha = \beta]$$

$$\boxed{\beta = 1/2}$$

Usando $\alpha = 1/2$ en (4)

$$\gamma = -3\alpha$$

$$\boxed{\gamma = -3/2}$$

Con esto ya sabemos que la dimensión de

$$[G]^{1/2} \cdot [h]^{1/2} \cdot [c]^{-3/2} = L$$

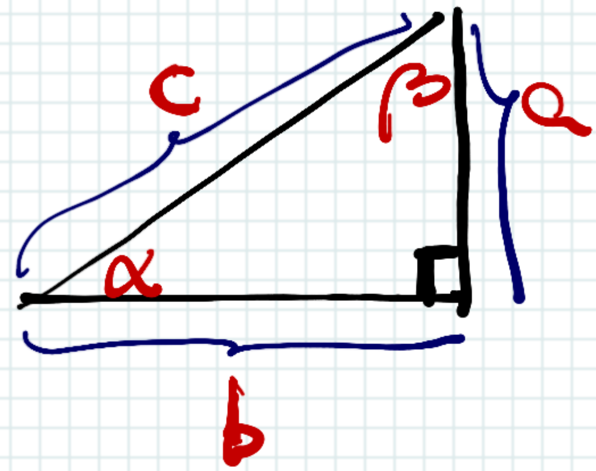
Luego una cantidad de dimensión longitud puede ser:

$$\boxed{K \cdot G^{1/2} \cdot h^{1/2} \cdot c^{-3/2}}$$

$\rightarrow$ constante cualquiera adimensional.

P2] Trigonometría

Mini resumen:



$$\text{Sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

$$\text{Tan}(\alpha) = \frac{\text{Sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Sen}(\beta) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(\beta) = \frac{a}{c}$$

$$\text{Tan}(\beta) = \frac{b}{a}$$

Además se definen

1) $\text{cosec}(\alpha) = \dfrac{1}{\text{sen}(\alpha)}$ $\quad$ $\text{cotan}(\alpha) = \dfrac{1}{\text{Tan}(\alpha)}$

2) $\text{Sec}(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$

Relaciones básicas

$$\cos(\theta) = \operatorname{sen}(\pi/2 + \theta)$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = -\operatorname{sen}(-\theta)$$

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta)$$

Identidades:

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$$

$$\sec^2(x) - \tan^2(x) = 1$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

P2) Ahora si

a) Queremos la masa del cono de arena, para ello nos dan la densidad $\rho = 1,7 \frac{g}{cm^3}$.

Sabemos que $\rho = \frac{m}{V}$ masa volumen

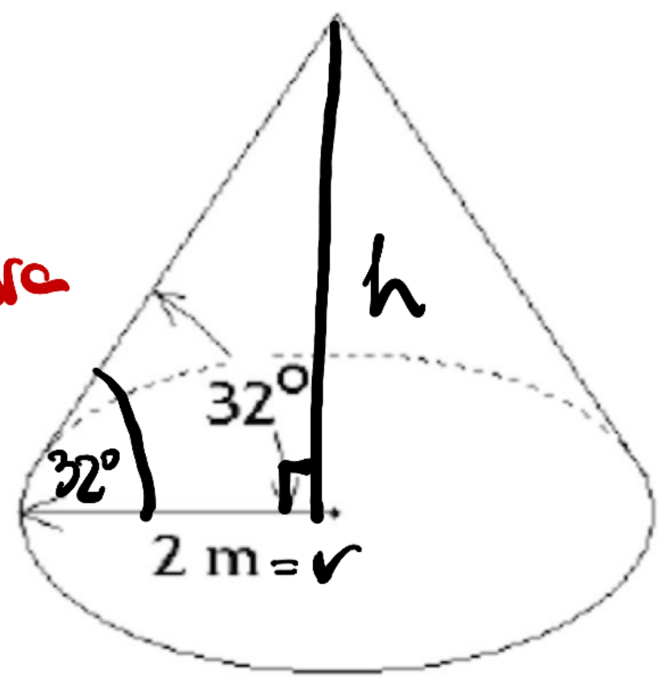
$\boxed{m = \rho V}$

Obteniendo el volumen del cono podemos determinar la masa

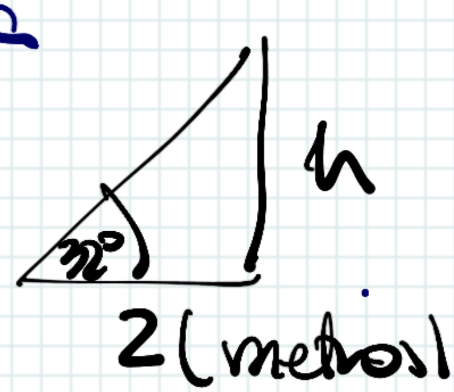
El volumen de un cono es

radio

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$ altura



Tenemos todo, menos h, para esto usamos trigonometría



$$\tan(32°) = \frac{h}{2(\text{metros})}$$

$$h = 2 \cdot \tan(32°)\ (\text{metros})$$

luego $$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

$$= \frac{\pi (2 \text{ metros})^2 \cdot (2 \tan(32^\circ) \text{ metros})}{3}$$

$$\boxed{V = \frac{8\pi}{3} \tan(32^\circ) (\text{metros})^3}$$

$$\boxed{V = \frac{8\pi}{3} \tan(32^\circ) [m^3]}$$

luego $m = \rho \cdot V$

$$m = 1{,}7 \left(\frac{g}{cm^3}\right) \frac{8\pi}{3} \tan(32^\circ) (m^3)$$

hay cm^3 y m^3, debemos transformar algunos para que desaparezcan las dimensiones de longitud

→ multiplicamos por 1, pero un 1 especial:

$$1 = \frac{(10^2 cm)^3}{(1m)^3} = 10^6 \frac{cm^3}{m^3}$$

$$m = 1{,}7 \left(\frac{g}{\cancel{cm^3}}\right) \frac{8\pi}{3} \tan(32°) (\cancel{m^3}) \cdot 10^6 \left(\frac{\cancel{cm^3}}{\cancel{m^3}}\right)$$

$$m = \frac{1{,}7 \cdot 8\pi}{3} \cdot 10^6 \tan(32°) [g]$$

$$m = 8{,}899 \times 10^6 [g]$$

b) Demostraciones

i) $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$

→ Desarrollemos el lado derecho:

$$\frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} = \frac{\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)^2}}$$

Usamos $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$$= \frac{\left(\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)}{\sqrt{\frac{\cos^2(\alpha)+\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\right)}{\frac{\sqrt{\cos^2(\alpha)+\operatorname{sen}^2\alpha}}{\cancel{\cos(\alpha)}}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\sqrt{\underbrace{\cos^2(\alpha)+\operatorname{sen}^2(\alpha)}_{=1}}}$$

Llegamos a lo que queríamos

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}} \checkmark$$

ii) $\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

¿Qué es $\arccos(x)$?

Si tenemos algo del tipo

$$\cos(\pi) = \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\arccos(\alpha) = \pi$$

es la función inversa

luego $\cos(\arccos(\alpha)) = \cos(\pi)$

$= \alpha$ //

Debemos buscar algo del tipo

$$\cos(\arccos(x))$$

para así utilizar lo escrito en #

Pero tenemos

$$\operatorname{sen}(\arccos(x))$$

Recordemos

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\operatorname{sen}^2(x) = 1 - \cos^2(x)$$

$$\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

luego

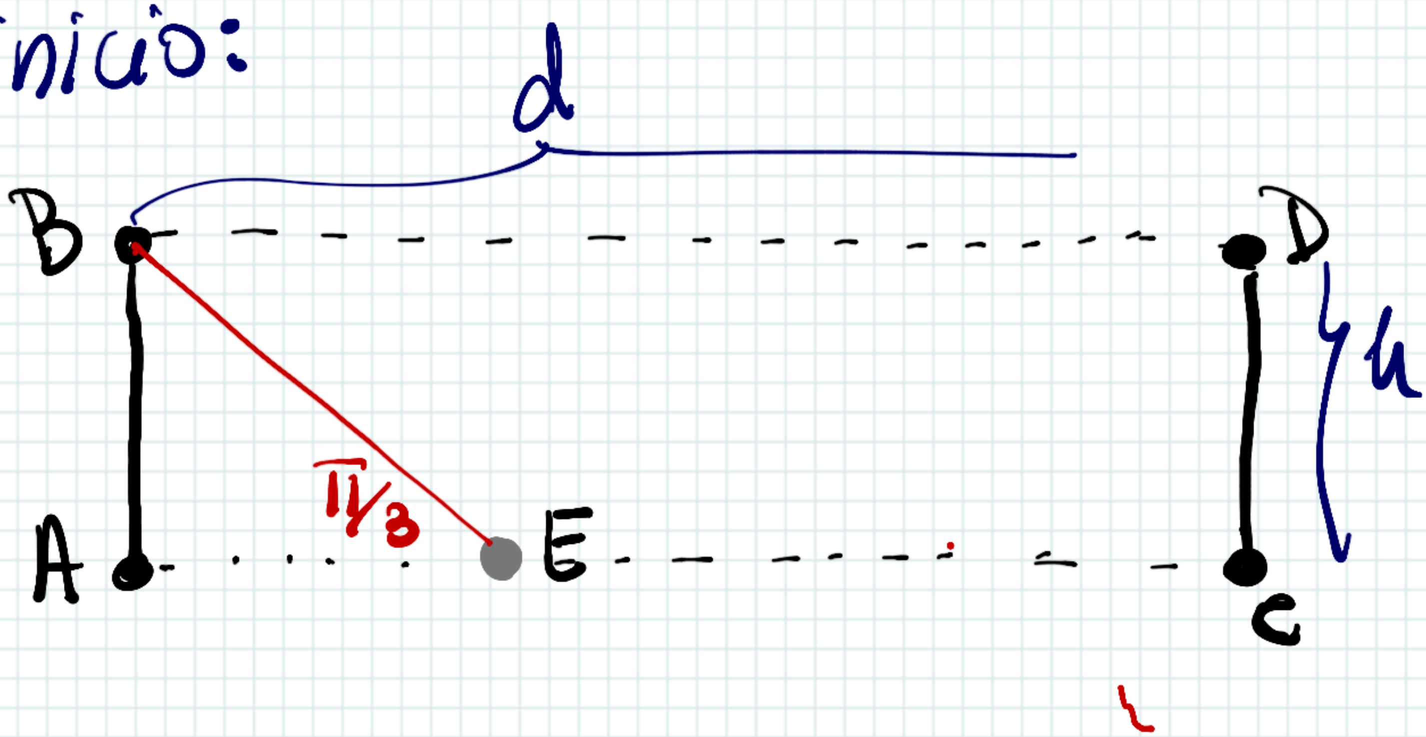
$$\operatorname{sen}(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}$$

$$= \sqrt{1 - (\cos(\arccos(x)))^2}$$

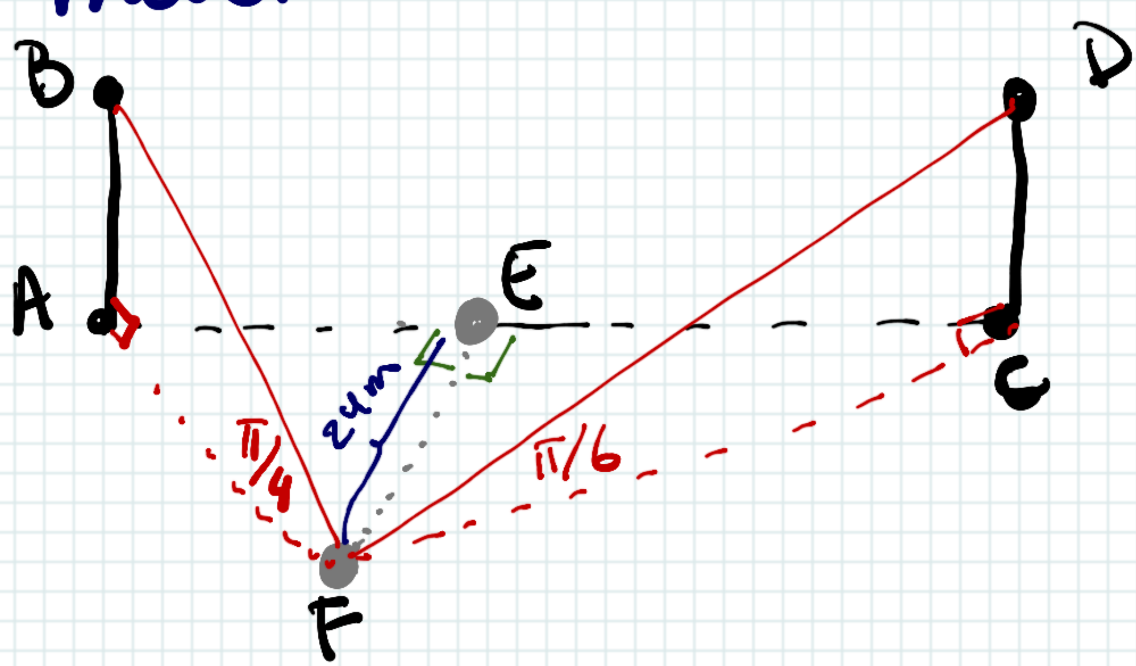
$$= \sqrt{1 - x^2} \quad //$$

c) Dibujamos el problema:

Al inicio:

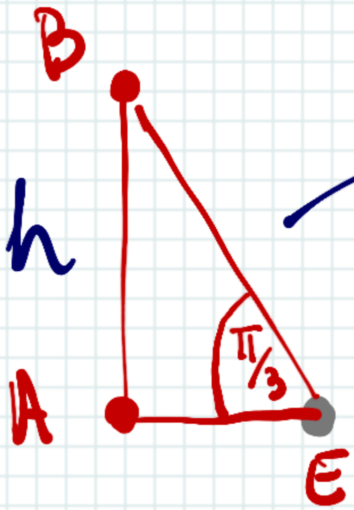


Tras moverse:



Nos piden determinar h y a
para ello fijemonos nos en los 4 triangulos.

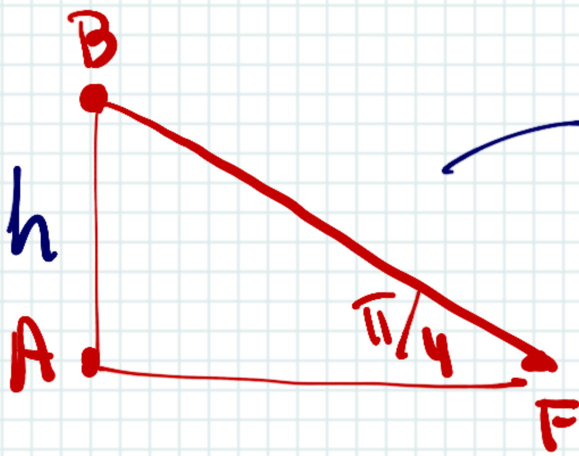
①



$$\tan(\pi/3) = \frac{h}{AE}$$

$$\boxed{AE = \frac{h}{\tan(\pi/3)}}$$

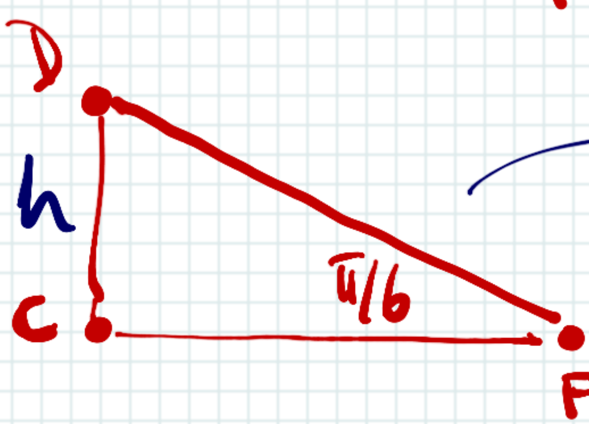
②



$$\tan(\pi/4) = \frac{h}{AF}$$

$$\boxed{AF = \frac{h}{\tan(\pi/4)}}$$

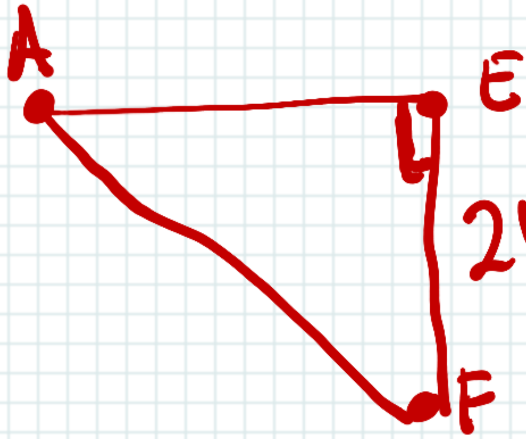
③



$$\tan(\pi/6) = \frac{h}{CF}$$

$$\boxed{CF = \frac{h}{\tan(\pi/6)}}$$

4



pitagoras

$$(AE)^2 + 24^2 = (AF)^2$$

usando lo obtenido antes de AE y AF

$$\frac{h^2}{\tan^2(\pi/3)} + 24^2 = \frac{h^2}{\tan^2(\pi/4)}$$

$$h^2 = \frac{24^2}{\dfrac{1}{\tan^2(\pi/4)} - \dfrac{1}{\tan^2(\pi/3)}}$$

$$h = \sqrt{\frac{24^2 \tan^2(\pi/4)\tan^2(\pi/3)}{\tan^2(\pi/3) - \tan^2(\pi/4)}}$$

$$\boxed{h = \frac{24\tan(\pi/4)\tan(\pi/3)}{\sqrt{\tan^2(\pi/3) - \tan^2(\pi/4)}}}$$

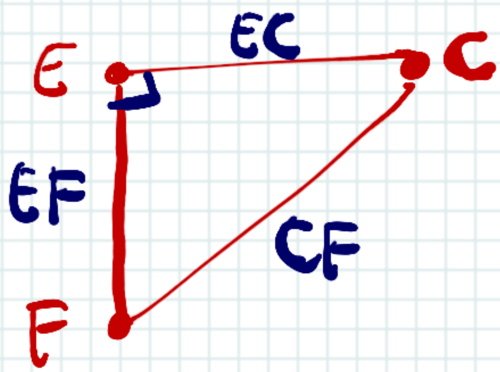
altura

Por último para determinar la distancia entre torres solo nos falta obtener EC ya que la distancia entre torres:

$$d = AE + EC$$

Para esto usemos un último triangulo:

(5)



$$(EC)^2 + (EF)^2 = (CF)^2$$ lo obtuvimos con el ③ triangulo

$$(EC)^2 + (24)^2 = \frac{h^2}{\tan^2(\pi/6)}$$

$$EC = \sqrt{\frac{h^2}{\tan^2(\pi/6)} - 24^2}$$

y luego

$$d = AE + EC$$

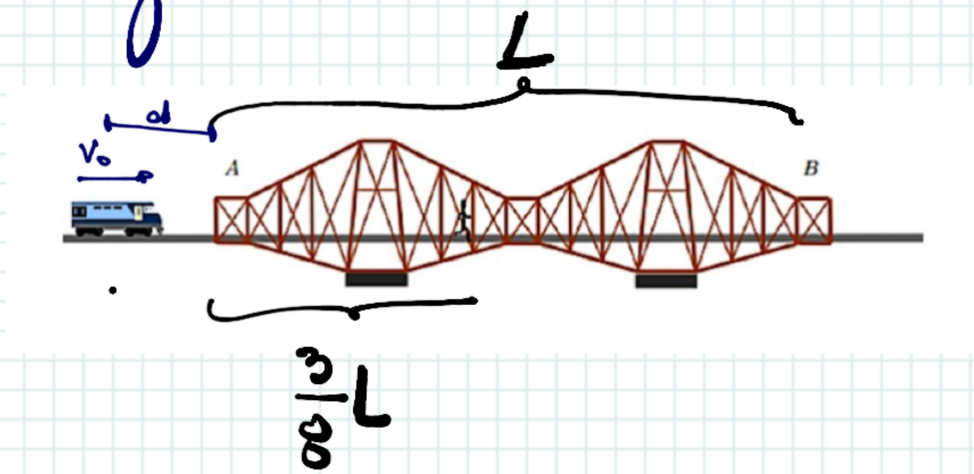
h siendo lo que obtuvimos antes.

$$\boxed{d = \frac{h}{\tan(\pi/3)} + \sqrt{\frac{h^2}{\tan^2(\pi/6)} - 24^2}}$$

la distancia

P3)

Tenemos la siguiente situación:



Sabemos que si corre hacia A, el tren lo choca en A, y si corre hacia B, lo choca en B

Debemos determinar la rapidez v del mechón.

Veamos primero el caso en que chocan en A:

Para que choquen en A

El tiempo que demora el tren en llegar a A debe ser el mismo que el del mechon

$$t_{TREN} = t_{MECHON}$$

Recordemos que si uno mantiene su velocidad constante

$\longrightarrow$ $\text{rapidez} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$

$\longrightarrow$ $\text{tiempo} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$

ya deno miramos

V_0 = rapidez del tren

V = rapidez mechon

d = distancia del tren a A

$\frac{3}{8}L$ = distancia mechon a A

$$t_{A\,TREN} = \frac{d}{V_0}$$

$$t_{A\,MECHON} = \frac{3}{8}\frac{L}{V}$$

$$\boxed{\frac{3}{8}\frac{L}{V} = \frac{d}{V_0}} \quad (1)$$

Ahora hagamos lo mismo para el caso en que chocan en B

Aquí la distancia del mechon es $L - \frac{3}{8}L$

y la distancia del tren a B

$d + L$

luego

$$t_{B\ \text{HELICÓN}} = \frac{L - \frac{3}{8}L}{v}$$

$$t_{B\ \text{TREN}} = \frac{d+L}{V_0}$$

igualamos:

$$\boxed{\frac{L}{v} - \frac{3}{8}\frac{L}{v} = \frac{d+L}{v_0}} \quad (2)$$

Restamos (2) - (1)

$$\left(\frac{L}{v} - \frac{3}{8}\frac{L}{v}\right) - \left(\frac{3}{8}\frac{L}{v}\right) = \frac{d+L}{v_0} - \frac{d}{v_0}$$

$$\frac{L}{v} - \frac{6}{8}\frac{L}{v} = \frac{L}{v_0}$$

$$\frac{2\cancel{L}}{\cancel{4}8v} = \frac{\cancel{L}}{v_0}$$

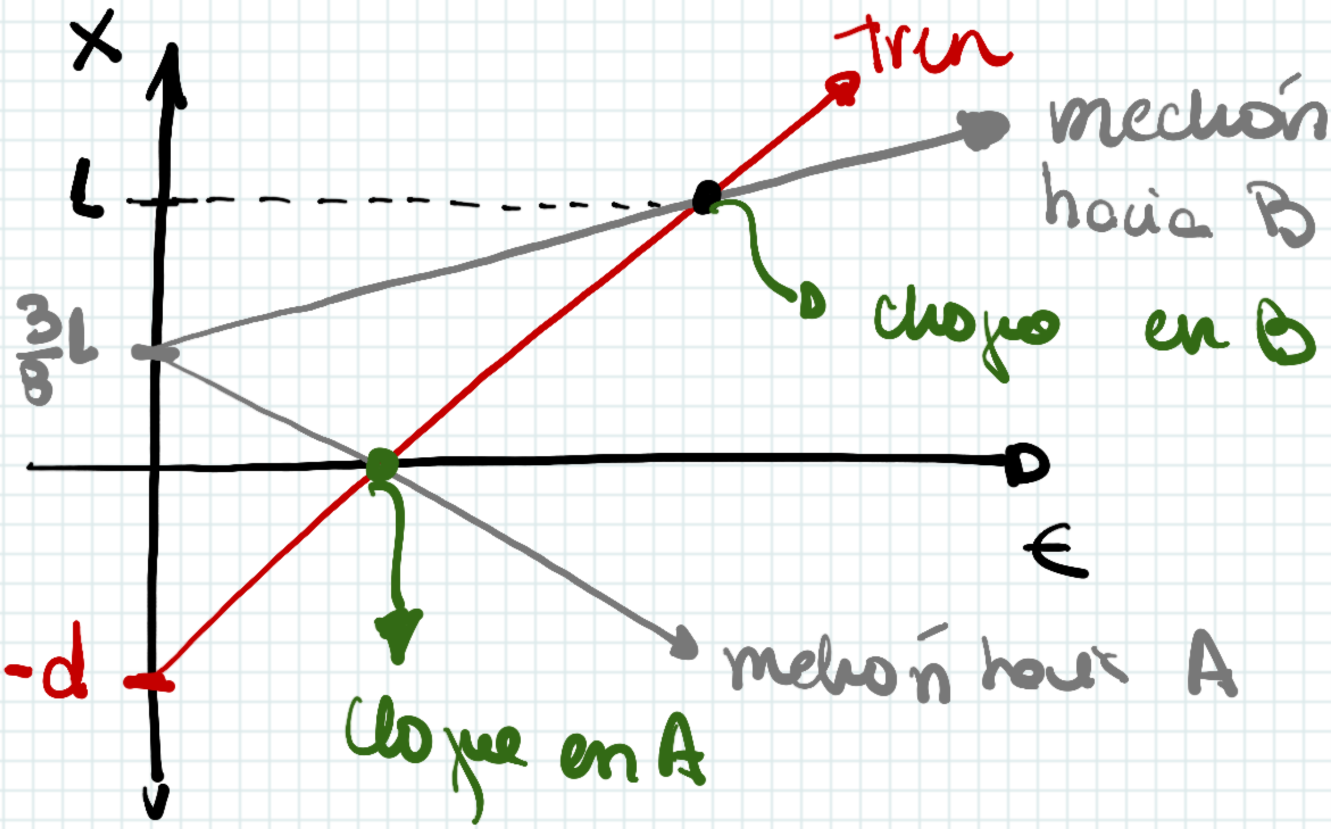
$$\boxed{v = v_0/4}$$

La velocidad media

ii)

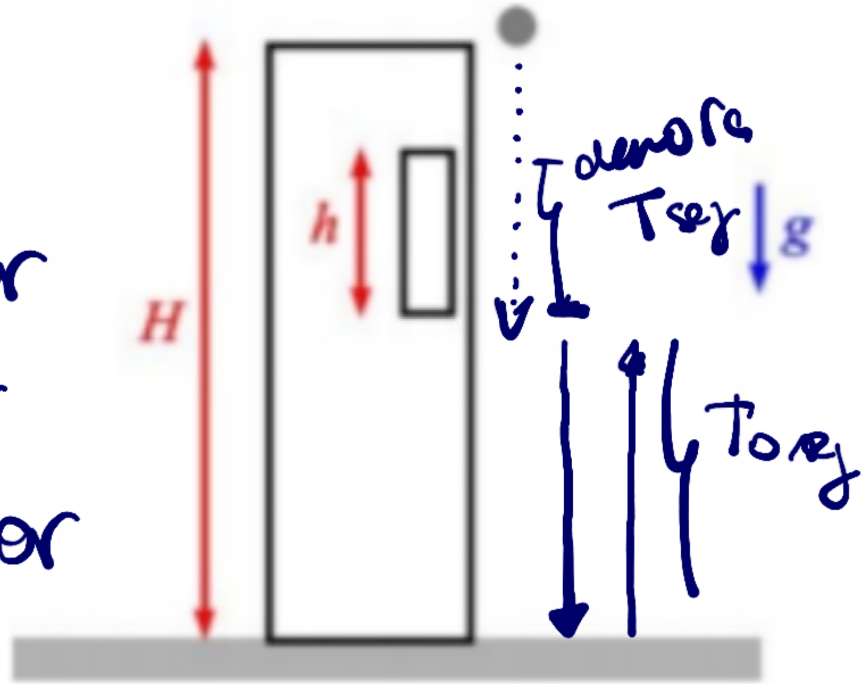
Ahora hagamos un gráfico para entender lo que sucede.

Colocando nuestro sistema de referencia en A


x
tren
mechón
hacia B
L
choque en B
$\frac{3}{8}L$
t
-d
mechón hacia A
choque en A

P4)

a) Queremos saber el tiempo en llegar hasta la parte superior de la ventana.



Primero obtengamos en caída libre, cuanto demora uno en caer H.

Usemos la ecuación

Ecuación itinerario (sistema de referencia el techo)

$$\cancelto{-H}{x} = \cancelto{0}{x_0} + \cancelto{0}{v_0} t - g t^2/2$$

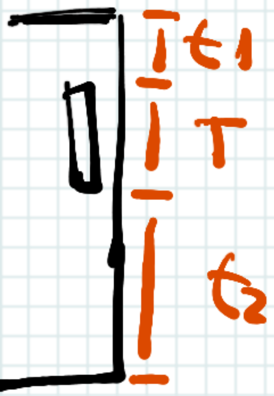
$$-H = -g t^2/2$$

$$H = g t^2/2 \rightarrow \boxed{t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}} \quad 1$$

Con este tiempo de bajada notamos que

$$t_B = t_1 + T + t_2$$

t_2: tiempo hasta llegar abajo



t_1: tiempo en llegar a la parte superior de la ventana

T: tiempo entre la parte superior de la ventana y la inferior

Ahora $t_2 = \frac{T_0}{2}$, ya que es la mitad de su trayecto de subida y bajada.

$$\Longrightarrow \quad t_B = t_1 + T + \frac{T_0}{2}.$$

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} = t_1 + T + \frac{t_B}{2}$$

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}} - T - \frac{T_0}{2}}$$

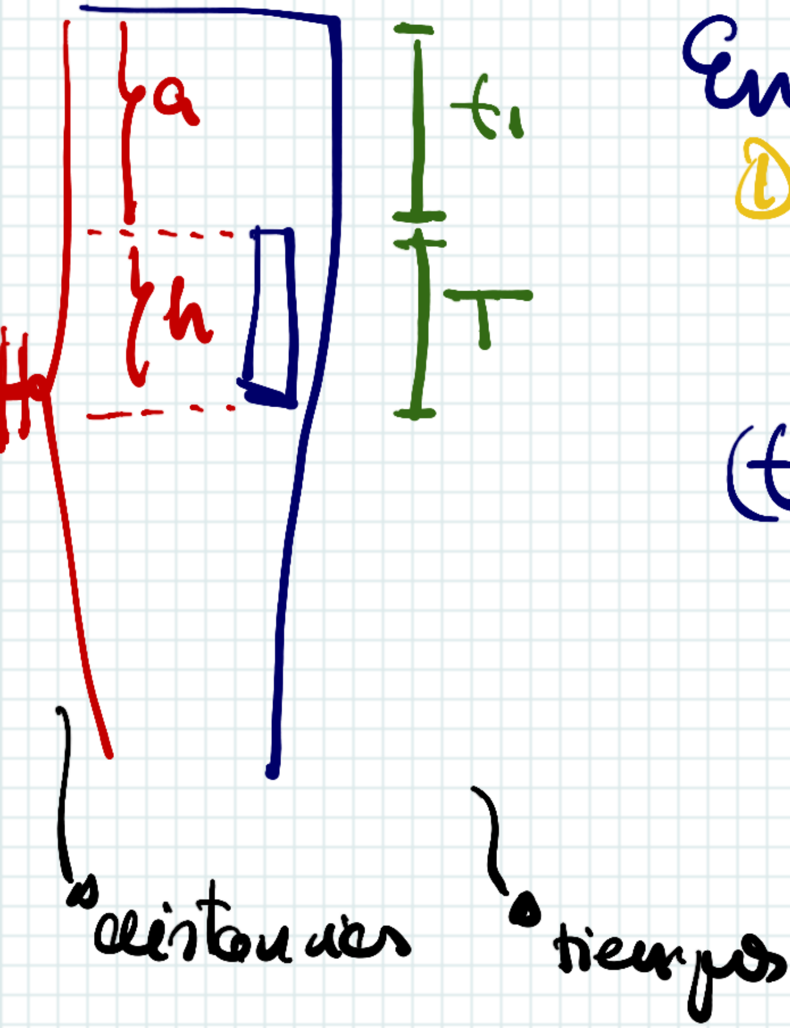
b) ya lo sabemos:

$$\boxed{t_2 = \frac{T_0}{2}}$$

c)

Para obtener $H = \frac{g}{8}\left(T_0 + T + \frac{2h}{Tg}\right)^2$

Realizamos lo mismo hecho en 1 pero para otros tiempos:



Entonces al igualarlos en ①

$$t_1^2 = 2a/g \quad ★$$

$$(t_1+T)^2 = \frac{2(h+a)}{g} \quad ★★$$

usando ★

$\cancel{t_1^2}$

Desarrollando ★★

$$\cancel{t_1^2} + 2t_1T + T^2 = \frac{2h}{g} + \cancel{\frac{2a}{g}}$$

$$\boxed{t_1 = \frac{\frac{2h}{g} - T^2}{2T}}$$

igualamos este t_1 con el de la parte a)

$$\frac{\frac{2h}{g} - T^3}{2T} = \sqrt{\frac{2H}{g}} - T - \frac{T_0}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{\frac{2h}{g} - T^2}{2T} + T + \frac{t_0}{2}$$

$$= \frac{h}{gT} - \frac{T}{2} + T + \frac{t_0}{2}$$

$$\sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{h}{gT} + \frac{T}{2} + \frac{t_0}{2}$$

$$\frac{2H}{g} = \left(\frac{h}{gT} + \frac{T}{2} + \frac{T_0}{2}\right)^2$$

$$H = \frac{g}{2}\left(\frac{h}{gT} + \frac{T}{2} + \frac{T_0}{2}\right)^2$$

$$\boxed{H = \frac{g}{8}\left(\frac{2h}{gT} + T + T_0\right)^2}$$