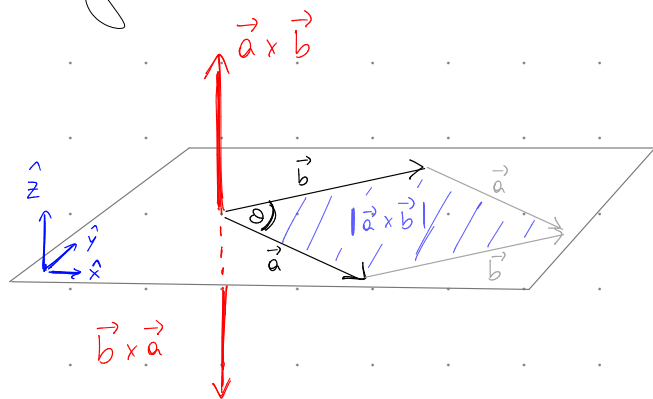


Resumen

→ Producto cruz: operación vectorial que tome dos vectores y entregue un vector perpendicular a los operados. El vector resultante tiene un tamaño igual al área del paralelogramo formado por los vectores iniciales.



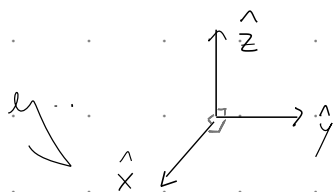
$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{n}$$

→ dirección: perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$

→ sentido: regla de la mano derecha

$$* \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

→ el prod. cruz no conmuta! ojo



$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

;

$$\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

;

$$\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$$

;

$$\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$$

;

$$\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$$

→ Torque: vector que caracteriza la capacidad que tiene una fuerza para generar una rotación c/r a un eje de giro

se define como: $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$

→ notar que tiene unidades [Nm], pero no se habla de joules pues T no corresponde a energía

→ ej. típico: la puerta



Mi loco dele pa afuera

Signos: $T > 0$ $\rightarrow$ genera rotaciones antihorarias 
 $T < 0$ $\rightarrow$ genera rotaciones horarias 

T es un análogo a la fuerza: $\vec{F} \propto \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}}$

$$T \propto \vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\theta}}$$

• Estática. un sólido estático debe cumplir

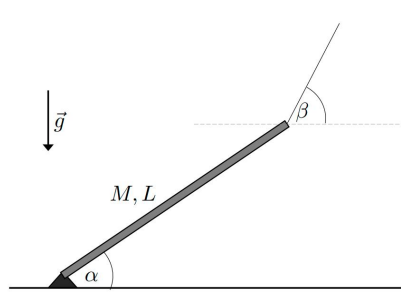
- no trasladarse
- no rotar

físicamente:

• no trasladarse: $\sum_i \vec{F}_i = 0$

• no rotar: $\sum_i \tau_i = 0$

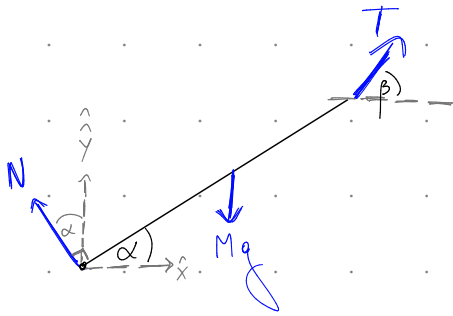
P1



↳ ¿tensión de la cuerda y reacción en el punto de apoyo?

~ Como la barra está en reposo, se tiene que:
 $\sum F = 0$ y $\sum \tau = 0$

Realicemos un DCL



$$\hat{x} \mid \sum F_x = T \cos \beta - N \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$\hat{y} \mid \sum F_y = N \cos \alpha - Mg + T \sin \beta = 0 \quad (2)$$

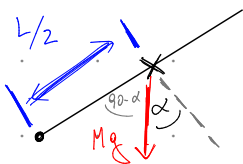
↳ Ahora analicemos los torques utilizando como pivote el punto de apoyo.

$$\sum \tau = \tau_N + \tau_{\text{peso}} + \tau_T$$

• $\tau_N = \vec{r}_N \times \vec{N} = 0 \rightarrow$ por elección de nuestro punto de apoyo

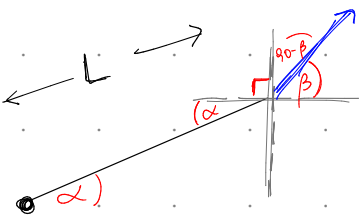
• $\tau_{\text{peso}} = \vec{r}_{\text{peso}} \times (-Mg \hat{y})$

↳ ¿dónde se "aplica" el peso? En el centro de masa!
 en el caso de una barra con su masa distribuida homogéneamente el centro de masa se ubica en el centro de esta:



~ $\tau_{\text{peso}} = - \frac{L}{2} Mg \sin(90 - \alpha) = - \frac{L}{2} Mg \cos(\alpha)$
 (Note: A red arrow indicates a clockwise rotation, which is negative in the standard convention.)

$$\bullet \tau_T = \vec{r}_T \times \vec{T} = + L T \sin(\alpha + 90 + 90 - \beta) = L T \sin(\pi + \alpha - \beta)$$



↳ quiere hacer girar de manera antihoraria ↺

$$\hookrightarrow \text{como } \sin(\pi - x) = \sin \pi \cos(-x) + \cos \pi \sin(-x) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow \tau_T = L T \sin(\beta - \alpha)$$

$$\Rightarrow \sum \tau = -\frac{L}{2} M g \cos \alpha + L T \sin(\beta - \alpha) \stackrel{!}{=} 0$$

De esta última expresión podemos despejar T :

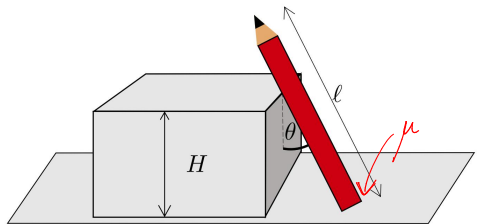
$$T = \frac{M g}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (1):

$$\frac{M g}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} \cos \beta - N \sin \alpha = 0 \Rightarrow N = \frac{M g}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)}$$

$$\therefore N = \frac{M g}{2} \frac{\cos \beta}{\tan \alpha} \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)}$$

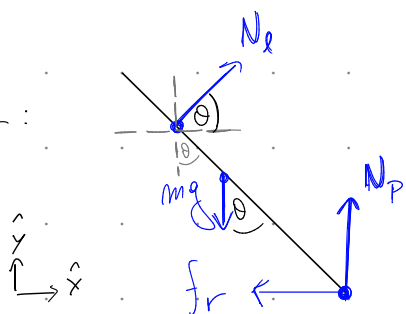
P2]



a) Reacción libro-lápiz y piso-lápiz

Como el lápiz se encuentra en equilibrio:
 $\Sigma F = 0$ y $\Sigma T = 0$

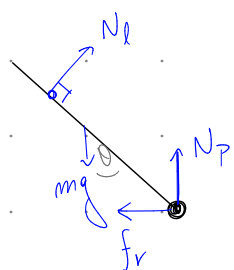
DCL:



$$\hat{x} \quad N_l \cos \theta - f_r = 0 \quad (1)$$

$$\hat{y} \quad N_l \sin \theta - mg + N_p = 0 \quad (2)$$

Veamos ahora el torque tomando como pivote el suelo:



$$\Sigma T = T_{N_p} + T_{f_r} + T_{mg} + T_{N_l}$$

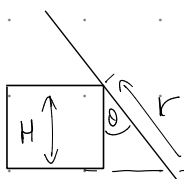
por elección de pivote

• $T_{mg} = + \frac{l}{2} mg \sin \theta$

↙ provoca giro antihorario ↻

• $T_{N_l} = \vec{r}_{N_l} \times N_l \rightarrow$ ¿dónde se aplica esta fuerza?

por geometría:



$$\cos \theta = \frac{H}{r} \Rightarrow r = \frac{H}{\cos \theta}$$

↙ giro horario ⤷

$$\Rightarrow T_{N_l} = - \frac{H}{\cos \theta} N_l \sin(90^\circ)$$

Así: $\Sigma T = \frac{l}{2} mg \sin \theta - \frac{H}{\cos \theta} N_l = 0 \Rightarrow N_l = \frac{l}{2H} mg \cos \theta \sin \theta$ (3)

Reemplazando (3) en (1):

$$\frac{l}{2H} mg \cos \theta \sin \theta \cdot \cos \theta - f_r = 0$$

$$\Rightarrow f_r = \frac{l}{2H} mg \cos^2 \theta \sin \theta \quad (4)$$

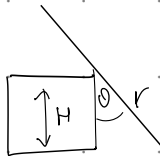
↙ (3) en (2):

$$\frac{l}{2H} mg \sin \theta \cos \theta \sin \theta - mg + N_p = 0$$

$$\Rightarrow N_p = mg \left[1 - \frac{l}{2H} \sin^2 \theta \cos \theta \right] \quad (5)$$

b) Condiciones que debe satisfacer l

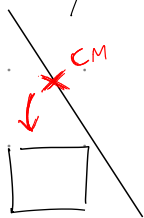
Por geometría:



$$r = \frac{H}{\cos \theta} \Rightarrow l \geq r = \frac{H}{\cos \theta}$$

para que logre apoyarse en el libro

Por otro lado, si l es muy grande, el torque ejercido por el peso sería mayor:



como quieren notar, la normal que ejerce el suelo va a disminuir $\Rightarrow$ caso límite $N_p = 0$

$$\text{así } N_p \geq 0 \Rightarrow 1 - \frac{l}{2H} \sin^2 \theta \cos \theta \geq 0 \rightarrow \frac{2H}{\sin^2 \theta \cos \theta} \geq l$$

$$\therefore H \leq l \cos \theta \leq \frac{2H}{\sin^2 \theta}$$

c) Determinar el valor de μ :

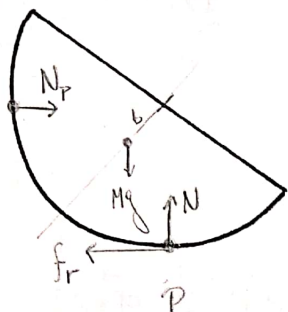
Sabemos que $f_r = \mu N_P$

usando (4) y (5):

$$\mu = \frac{f_r}{N_P} = \frac{l}{2H} mg \cos^2 \theta \sin \theta, \frac{2H}{mg(2H - l \sin^2 \theta \cos \theta)}$$

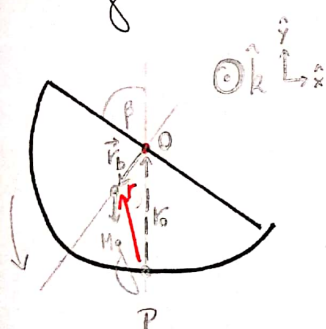
$$= \frac{l \cos^2 \theta \sin \theta}{2H - l \sin^2 \theta \cos \theta}$$

a) DCL :



N_p : fuerza que ejerce la pared
 N : fuerza que ejerce el suelo
 f_r : fuerza de roce que se opone al deslizamiento
 M_g : peso $\rightarrow$ notar que actúa en el CM

b) $\vec{T}_{M_g}$?



Antes que todo $\vec{T}_{M_g}$ "apunte" en $+\hat{k}$ o $-\hat{k}$?

$\rightarrow$ M_g quiere realizar un giro antihorario, se puede confirmar por la regla de la mano derecha, por lo que apunta a $+\hat{k}$.

$\rightarrow$ Por definición tenemos que $\vec{T}_{M_g} = \vec{r} \times (M_g(-\hat{y}))$ $\rightarrow$ pero está complicado (no sabemos mucho de $\vec{r}$)

para facilitar el cálculo notar que $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}_b$

le gracia radica en que $\vec{r}_o = R\hat{y}$ y $|\vec{r}_b| = \frac{3}{8}r$

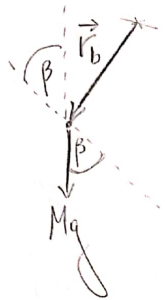
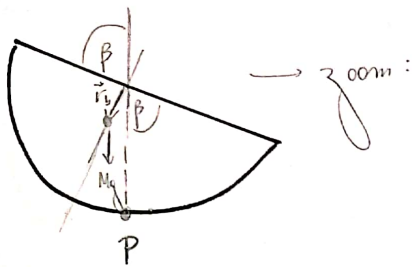
$$\Rightarrow \vec{T}_{M_g} = (\vec{r}_o + \vec{r}_b) \times (-M_g\hat{y}) = \vec{r}_o \times (-M_g\hat{y}) + \vec{r}_b \times (-M_g\hat{y})$$

$\uparrow$
x distribuye

$$= \underbrace{(R\hat{y}) \times (-M_g\hat{y})}_{=0 \quad (\hat{y} \times \hat{y} = 0)} + \vec{r}_b \times (-M_g\hat{y})$$

$$\Rightarrow \vec{T}_{M_g} = \vec{r}_b \times (-M_g\hat{y})$$

notemos entonces que:



notar que $T_{Mq} = |\vec{r}_b| | -Mg \hat{y} | \underbrace{\sin \theta}_{\text{componente } \perp}$ (definición)

$$\Rightarrow T_{Mq} = b Mq \cos \beta$$

$\hookrightarrow$ notar que $Mq \cos \beta \perp \vec{r}_b$!

$$\therefore \vec{T}_{Mq} = Mq b \cos \beta \hat{k} = \frac{3}{8} Mq R \cos \beta \hat{k}$$

c) cfr?

Como la semiesfera está apoyada (estática), se cumple que $\sum_i \vec{F}_i = 0$

$$\text{y } \sum_i \vec{T}_i = 0$$

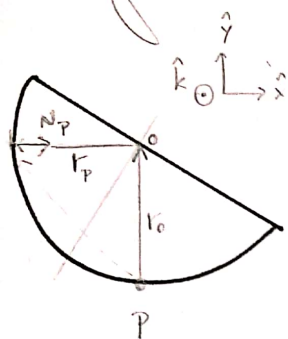
$$\bullet \sum_i \vec{F}_i = 0 : \hat{x} \mid N_p - f_r = 0 \Leftrightarrow N_p = f_r$$

$$\hat{y} \mid N - Mq = 0 \Leftrightarrow N = Mq$$

$$\bullet \sum_i \vec{T}_i = 0 : T_N = T_{fr} = 0 \text{ pues actúan en el pivote (r=0)}$$

$$\text{luego } \sum_i \vec{T}_i = \underbrace{\vec{T}_N + \vec{T}_{fr}}_0 + \vec{T}_{N_p} + \vec{T}_{Mq} = 0 \Rightarrow \vec{T}_{N_p} = - \vec{T}_{Mq}$$

Análogamente a la parte b



$$\begin{aligned}\vec{T}_{N_p} &= (\vec{r}_p + \vec{r}_o) \times \vec{N}_p \\ &= \vec{r}_p \times \vec{N}_p + \vec{r}_o \times \vec{N}_p\end{aligned}$$

pero $\vec{r}_p = -R \hat{x}$; $\vec{r}_o = R \hat{y}$ y $\vec{N}_p = N_p \hat{x}$

$$\Rightarrow \vec{T} = \underbrace{(-R \hat{x}) \times (N_p \hat{x})}_{\hat{x} \times \hat{x} = 0} + \underbrace{(R \hat{y}) \times (N_p \hat{x})}_{\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{k}} = -R N_p \hat{k}$$

Como teníamos: $\vec{T}_{N_p} = -\vec{T}_{Mg} \Rightarrow -R N_p = -\frac{3}{8} M g R \cos \beta$

así $N_p = \frac{3}{8} M g \cos \beta$

y por $\sum F = 0$ sabemos que $N_p = f_r$

$\therefore f_r = \frac{3}{8} M g \cos \beta$

d) $\beta_{\min}$ para que no resbale

Tenemos que $f_r = \frac{3}{8} Mg \cos \beta \leq \mu N$

pero por $\sum_i \vec{F}_i = 0$ sabemos además que $N = Mg$

$$\Rightarrow f_r \leq \mu Mg$$

imponiendo el caso límite: $f_r = \mu Mg \Leftrightarrow \frac{3}{8} Mg \cos \beta = \mu Mg$

así: $\cos \beta = \frac{8}{3} \mu$, por enunciado $\mu = \frac{3}{16}$

luego $\cos \beta = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{2}$ y así $\beta = 60^\circ$