Pauta Auxiliar #11

• Resumen:

↪ momentum lineal: también llamado "cantidad de movimiento".

Se define esta cantidad como:

$$\vec{P} = m\vec{v}$$ ⟶ notar que es un vector!

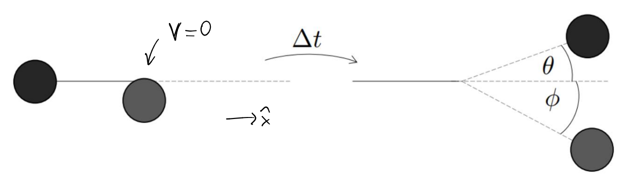
↪ si no actuan fuerzas externas sobre un sistema, entonces esta cantidad se conservará en el sistema. → se puede conservar por ejes. (ver P2)

↪ Choques: interacción de cuerpos en donde se intercambia momentum

Hay 3 tipos:

- elástico: el momento y la energía cinética se conservan
- inelástico: el momento se conserva, no así la energía cinética. se producen deformaciones / calor.
- perfectamente inelástico: choque inelástico en donde los cuerpos que chocan quedan unidos viajando a la misma velocidad.

P1

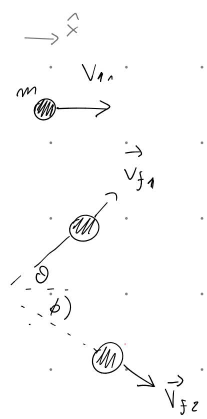


→ Choque elástico, no hay roce

¿ ϕ ?

↳ Como estamos en presencia de un choque elástico ⇒ habrá conservación de energía y de momentum

• Conservación de $\vec{p}$:



· $\vec{P}_{inicial}$ $\qquad \vec{P}_i = m\,\vec{V}_{1i}$

· $\vec{P}_{final}$: $\qquad \vec{P}_f = m\,\vec{V}_{1f} + m\,\vec{V}_{2f}$

→ $\vec{P}_{inicial} = \vec{P}_{final}$: $\qquad \vec{V}_{1i} = \vec{V}_{1f} + \vec{V}_{2f} \qquad$ (1

• Conservación de la energía

$$E_i = \tfrac{1}{2}\, m\, V_{1i}^2$$
$$E_f = \tfrac{1}{2}\, m\, V_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}\, m\, V_{2f}^2$$

$E_1 = E_2$: $\qquad V_{1i}^2 = V_{1f}^2 + V_{2f}^2 \qquad$ (2

↳ Recordemos que $V_{1i}^2 = \vec{V}_{1i} \cdot \vec{V}_{1i}$, entonces juguemos con la ec. (1):

$(1)\cdot\vec{V}_{1i}$: $\qquad \vec{V}_{1i}\cdot\vec{V}_{1i} = (\vec{V}_{1f} + \vec{V}_{2f})\cdot\overbrace{(\vec{V}_{1f} + \vec{V}_{2f})}^{\vec{V}_{1i}}$

$$\Rightarrow \quad V_{1i}^2 = \vec{V}_{1f}\cdot\vec{V}_{1f} + \vec{V}_{1f}\cdot\vec{V}_{2f} + \vec{V}_{2f}\cdot\vec{V}_{1f} + \vec{V}_{2f}\cdot\vec{V}_{2f}$$

$$\Rightarrow \quad V_{1i}^2 = V_{1f}^2 + V_{2f}^2 + 2\,\vec{V}_{1f}\cdot\vec{V}_{2f}$$

def. de producto punto

$$\Rightarrow \quad V_{1i}^2 = V_{1f}^2 + V_{2f}^2 + 2\,V_{1f}\,V_{2f}\cdot\cos(\phi + \theta) \qquad (3$$

Juntando la ec. (2) con (3):

$$\left.\begin{aligned} V_{1i}^2 &= V_{1f}^2 + V_{2f}^2 \\ V_{1i}^2 &= V_{1f}^2 + V_{2f}^2 + 2 V_{1f} V_{2f} \cos(\theta + \phi) \end{aligned}\right\} \quad 0 = 2 V_{1f} \cdot V_{2f} \underbrace{\cos(\theta+\phi)}_{=0}$$

Como $\cos(\theta + \phi) = 0 \Rightarrow \phi + \theta = \pi/2 \quad \therefore \quad \boxed{\phi = \pi/2 - \theta}$

* otra manera de realizar este problema sería descomponer el momentum:

$$\vec{P}_i = P_{xi}\,\hat{x} \qquad = m V_{1i}\,\hat{x}$$

$$\vec{P}_f = P_{xf}\,\hat{x} + P_{yf}\,\hat{y} \qquad = m\left[V_{1f}\cos\theta + V_{2f}\cos\phi\right]\hat{x} + m\left[V_{1f}\sin\theta + V_{2f}\sin\phi\right]\hat{y}$$

$$\Rightarrow \quad P_{xi} = P_{xf}: \qquad V_{1i} = V_{1f}\cos\theta + V_{2f}\cos\phi$$

$$P_{yi} = P_{yf}: \qquad 0 = V_{1f}\sin\theta + V_{2f}\sin\phi$$

↳ y habría que matraquear esto para utilizar la condición que entrega la conservación de energía.

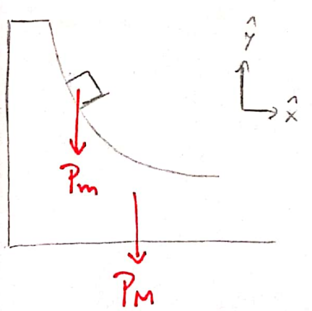
pero es un camino más largo

P2

a) ¿V de m y de M en el tramo horizontal?

Como el sisteme parte del reposo $\rightarrow P_{inicial} = 0$

Ahora, cuando la masa se desliza en la zona no-horizontal noten que está actuando una fuerza externa en los cuerpos, fuerza que corresponde al peso y que actúa solamente en la dirección $(-\hat{y})$.



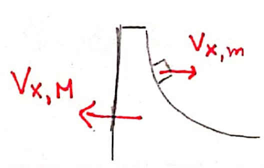
Recuerden que el momentum es un vector:

$$\vec{P} = P_x \hat{x} + P_y \hat{y}$$

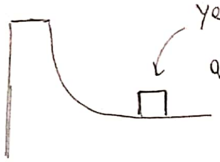
como esta fuerza externa actúa en $(-\hat{y})$, el momento en el eje $\hat{y}$ NO se conserva.

¿Actúan fzas. externas en $\hat{x}$? No, solo actúa la normal que es una fuerza interna $\Rightarrow$ el momento en el eje $\hat{x}$ SI se conserva

Luego noten que la masa, mientras cae, está ganando velocidad en $\hat{X}$ y como el momento se conserva $(\because P_i = 0)$ la cuña ganará velocidad en $(-\hat{x})$ $\longrightarrow$



Luego, cuando m llega a la parte horizontal, la cuña y la masa poseen cierta velocidad.
(a mí me costaba mucho ver esto, por eso lo dejo explicado acá)



ya no puede seguir ganando vel. en $\hat{x}$.

Ahora por conservación de momentum:

(1)

ya que va a la izq.

$$P_i = 0 \quad \wedge \quad P_f = m v_m - M v_M \quad \rightarrow P_i = P_f \Rightarrow 0 = m v_m - M v_M \Leftrightarrow m v_m = M v_M$$

Por conservación de energía: (no actuan fzas. disipativas)

no podemos asumir que es 0, pues depende del centro de masa

$$E_i = \underbrace{(\overset{0}{\cancel{K_m}} + U_m)}_{\text{masa } m} + \underbrace{(\overset{0}{\cancel{K_M}} + U_M)}_{\text{cuña}} = mgh + U_M$$

la misma que la inicial pues no cambia de altura

$$E_f = \underbrace{(K_m + \overset{0}{\cancel{U_m}})}_{\text{masa } m} + \underbrace{(K_M + U_M)}_{\text{cuña}} = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 + U_M$$

$\hookrightarrow$ como se conserva: $E_i = E_f \Rightarrow mgh + U_M = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 + U_M$

$$\Leftrightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M v_M^2 \qquad (2)$$

Jugando con las ecuaciones :

de (1) : $v_M = \frac{m}{M} v_m \xrightarrow{\text{en } (2)} mgh = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M} v_m\right)^2$

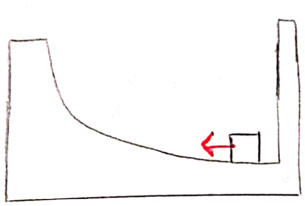
$$\Rightarrow mgh = \frac{1}{2} m v_m^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \Leftrightarrow gh = \frac{1}{2} v_m^2 \left(\frac{M+m}{M}\right)$$

por lo que : $\boxed{v_m = \sqrt{2gh\left(\frac{M}{M+m}\right)}}$ → hacia la derecha //

Reemplazando en (1) : $\boxed{v_M = \frac{m}{M}\sqrt{2gh\left(\frac{M}{M+m}\right)}}$ → hacia la izquierda //

b) ¿ v de m ∧ M post-choque ?

noten que , tras el choque , tenemos la sgte. situación :



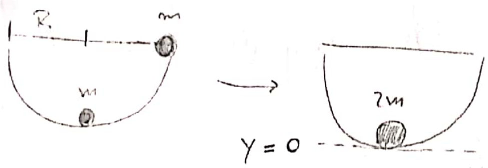
m va a chocar y se va a devolver .

como es un choque eléstico , el momento y la energía se conservan.

Como $P_i = 0$ se van a resolver las mismas ecuaciones de la parte (a) llegando a los mismos resultados PERO con direcciones distintas.

i.e. : v_m → hacia la izquierda v_M → hacia la derecha //

P3



Tras el impacto quedan unidas $\Rightarrow$ choque perfectamente inelástico

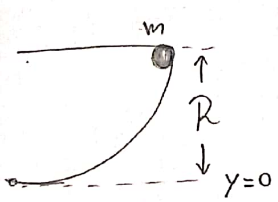
a) ¿ h_{max} del sistema ?

↳ idea: sabiendo la velocidad de las pelotitas juntas, podremos calcular h_{max} por conservación de la energía. ¿Cuál será la energía inicial a considerar?

↳ como el choque es Perfectamente Inelástico, el momento se conserva pero NO la energía cinética.

→ notar eso sí que la energía se conserva antes del choque y otra cantidad se conservará post-choque.

Dicho esto:



Por conservación de energía, calculemos la rapidez con la cual llega la bolita:

$$E_i = mgR + \cancel{K}^{\,0} \quad \text{parte del reposo} \qquad y \qquad E_f = mg \cdot 0 + \frac{1}{2} m v^2$$

↳ por conservación: $mgR = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow V_* = \sqrt{2gR}$

vel. de impacto!

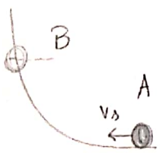
Teniendo la rapidez del impacto, calculemos la rapidez con la cual subirá la masa 2m (nuevo sistema).

→ Por conservación de momentum:

$$P_i = m\sqrt{2gR} \quad \text{y} \quad P_f = 2m\,V_s$$

como $P_i = P_f \Rightarrow m\sqrt{2gR} = 2m\,V_s \Rightarrow v_s = \frac{1}{2}\sqrt{2gR} = \sqrt{gR/2}$

→ Tras la colisión, la energía se conserva:

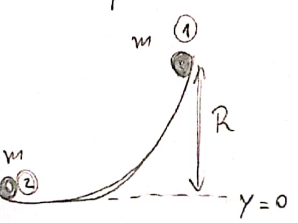


$$E_A = \cancel{2mg\cdot 0} + \frac{1}{2}(2m)v_s^2 = mgR/2$$

$$E_B = \cancel{K} + (2m)g\,h_{max}$$

por conservación: $E_A = E_B \Rightarrow 2mg\,h_{max} = mgR/2 \Rightarrow \boxed{h_{max} = \frac{R}{4}}$ lo pedido

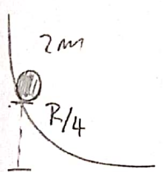
b) Comparar las energías



en la situación inicial la energía del sistema corresponde a:

$$E_i = \underbrace{(U_1 + K_1)}_{\text{masa ①}} + \underbrace{(U_2 + K_2)}_{\text{masa ②}} \overset{U_2=K_2=K_1=0}{=} U_1 = mgR$$

En la situación final, la energía del sistema corresponde a:



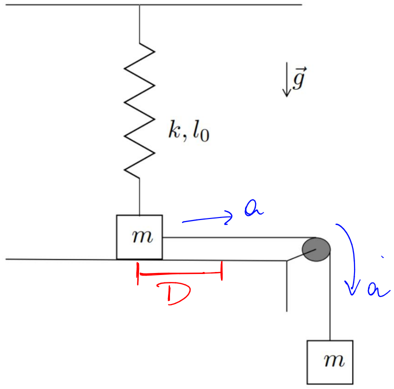
$$E_f = U + \cancel{K}^{\,0} = 2mg\frac{R}{4} = \frac{mgR}{2}$$

Luego es fácil apreciar que existe una variación de la energía:

$$\Delta E = E_f - E_i = mg\frac{R}{2} - mgR = -mgR/2 \rightarrow \text{¿qué pasó?}$$

Esta energía se perdió debido al choque perfectamente inelástico, en donde se pierde debido a deformaciones de las masas o por generación de calor.

P4

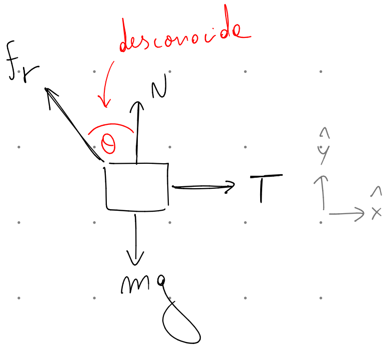


$\rightsquigarrow$ ¿D en el que la masa comienza a levantarse?

¿$v(D)$?

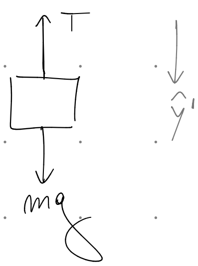
- $k = 5mg/l_0$
- notar que, como comparten una misma cuerda, los bloques cumplirán: $d_1 = d_2 \rightarrow v_1 = v_2 \rightarrow a_1 = a_2$

$\rightarrow$ Armando los DCL:



$\hat{x}\rfloor \quad T - f_r \sin\theta = m \cdot a \qquad (1$

$\hat{y}\rfloor \quad N + f_r \cos\theta - mg = 0 \qquad (2$



$\hat{y}'\rfloor \quad mg - T = m \cdot a \qquad (3$

$\hookrightarrow$ Al imponer $N \to 0$, (2) $\quad f_r \cos\theta^* = mg \qquad (2')$

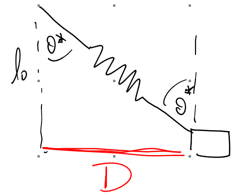
en donde

$$f_r = k(L - l_0) = k\left(\frac{l_0}{\cos\theta^*} - l_0\right) = \frac{k\, l_0}{\cos\theta}(1 - \cos\theta)$$

como $k = \frac{5mg}{l_0} \Rightarrow f_r = \frac{5mg}{\cos\theta^*}(1 - \cos\theta^*)$

Así, (2') $\quad \frac{5mg}{\cos\theta^*}(1 - \cos\theta^*) \cdot \cos\theta^* = mg \Rightarrow 5(1 - \cos\theta^*) = 1 \rightarrow \cos\theta^* = 4/5$

Volviendo al lado geométrico:



$$\tan\theta^* = \frac{D}{l_0} \Rightarrow D = l_0 \tan\theta^*$$

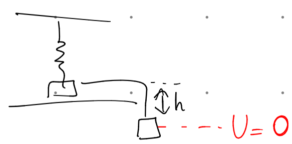
↳ sabemos que $\cos\theta^* = 4/5$ $\rightsquigarrow$ como $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad \forall\alpha$

$$\Rightarrow \sin\theta^* = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = 3/5$$

Así $\tan\theta^* = \frac{\sin\theta^*}{\cos\theta^*} = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{4} = \frac{3}{4}$ $\quad\therefore\quad$ $\boxed{D = \frac{3}{4} l_0}$

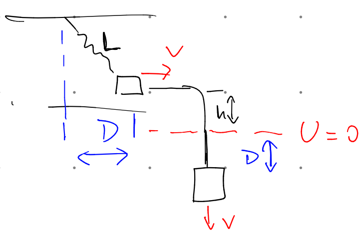
↳ ¿Cuál es la rapidez? Como no hay fzas. disipativas, podemos utilizar conservación de la energía:

• situación inicial:



$$E_i = \overset{\text{reposo}}{\underset{0}{\cancel{K}}} + U_g + \overset{0}{\cancel{U_e}} = mgh$$

• situación final:



$$E_f = \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} mv^2 - mgD + \tfrac{1}{2} k (L-l_0)^2 + mgh$$

$$= mv^2 - mgD + \tfrac{1}{2} k \left(\frac{l_0}{\cos\theta^*} - l_0\right)^2 + mgh$$

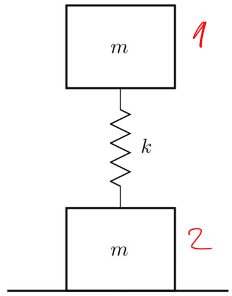
así: $E_i = E_f$: $\quad mgh = mv^2 - mgD + \frac{1}{2} k \frac{l_0^2}{\cos^2\theta^*}\left(1-\cos\theta^*\right)^2 + mgh$

$$\Rightarrow 0 = mv^2 - mg\frac{3}{4} l_0 + \frac{1}{2}\frac{5mg}{l_0}\cdot\frac{l_0^2}{(4/5)^2}\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$0 = mv^2 - mg\frac{3}{4} l_0 + \frac{5mgl_0}{32}$$

$$\Rightarrow v^2 = g\frac{l_0}{32}(24-5) \longrightarrow \therefore \boxed{v = \sqrt{19 g l_0/32}}$$

PS

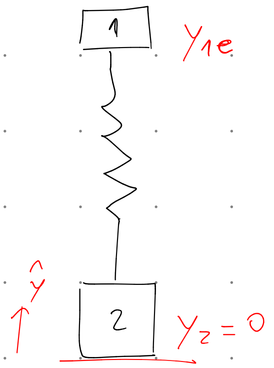


→ ¿ Compresión para que 2 se despegue de la mesa?

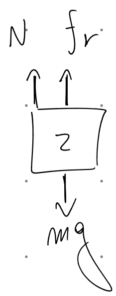
→ Consideremos dos situaciones:

- el resorte esté comprimido
- el resorte esté en su máxima elongación al "descomprimirse"

→ Analicemos la 2da situación

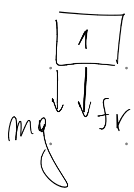


↳ veamos los DCL:



0 para que despegue

$$\hat{y} \rfloor \quad \cancel{N} + f_r - mg = m \cdot a$$



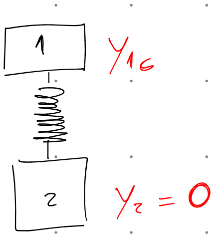
$$\hat{y} \rfloor \quad -f_r - mg = -m \cdot a$$

en este caso $f_r = k\left[(y_{1e} - y_2) - l_0\right] = k\,(y_{1e} - l_0)$

Así, en el caso límite tendremos para 2: $k\,(y_{1e} - l_0) - mg = 0$

$$\Rightarrow \quad y_{1e} = \frac{mg}{k} + l_0$$

↳ Veamos el caso de compresión y comparemos energías:



$$\rightsquigarrow \quad E_i = mg\,y_{1c} + \tfrac{1}{2}k\,(y_{1c} - l_0)^2$$

$$E_f = mg\,y_{1e} + \tfrac{1}{2}k\,(y_{1e} - l_0)^2$$

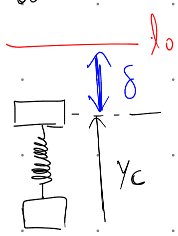
Al imponer conservación de la energía tendremos:

$$mg\,y_{1c} + \tfrac{1}{2} k (y_{1c} - l_0)^2 = mg\,y_{1e} + \tfrac{1}{2} k (y_{1e} - l_0)^2$$

↳ como $y_{1e} = \frac{mg}{k} + l_0 \Rightarrow mg\,y_{1c} + \tfrac{1}{2} k (y_{1c} - l_0)^2 = mg \cdot \frac{mg}{k} + mg l_0 + \frac{1}{2} k \frac{m^2 g^2}{k^2}$

$$\Leftrightarrow mg\,y_{1c} + \tfrac{1}{2} k (y_{1c} - l_0)^2 = \frac{3}{2} \frac{m^2 g^2}{k} + mg l_0 \qquad (*)$$

*notemos que, por enunciado piden la compresión con respecto al largo natural es decir:



→ necesitamos δ, no $y_c \Rightarrow y_c + \delta = l_0 \leadsto y_c = l_0 - \delta$

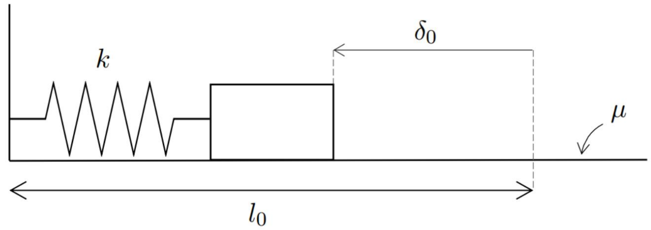
Reemplazando en (*): $mg l_0 - mg\delta + \tfrac{1}{2} k \delta^2 = \tfrac{3}{2} m^2 g^2/k + mg l_0$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2} k \delta^2 - mg\,\delta - \tfrac{3}{2} m^2 g^2/k = 0$$

Resolviendo la cuadrática: $\delta = \dfrac{mg \pm \sqrt{m^2 g^2 + 3 m^2 g^2}}{k} = \dfrac{mg \pm 2mg}{k}$

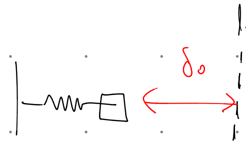
Como δ viene a ser una distancia, $\delta > 0$ $\quad \boxed{\delta = \dfrac{3mg}{k}}$

P6



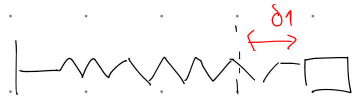
$\rightsquigarrow$ Relación entre δ_{n+1} y δ_n

↳ El comportamiento es el siguiente: $t=0$



$\delta_0 > \delta_1$

t sig.

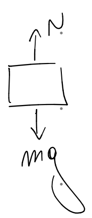


↳ La energía en $t=0$: $E_0 = \frac{1}{2} k \left[(l_0 - \delta_0) - l_0 \right]^2 = \frac{1}{2} k \delta_0^2$

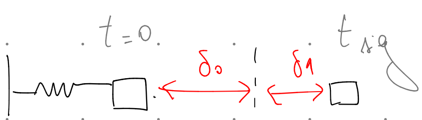
luego en el tiempo siguiente $E_1 = \frac{1}{2} k \left[(l_0 + \delta_1) - l_0 \right]^2 = \frac{1}{2} k \delta_1^2$

↳ Como hay roce, la energía del sistema disminuye ; i.e. $E_1 < E_0$

¿Cuánta energía se pierde? Se obtiene calculando el trabajo realizado por el roce



$N = Mg$, $f_r = \mu \cdot N = \mu M g$



$$W_{fr} = \vec{f_r} \cdot \vec{d} = -\mu M g (\delta_1 + \delta_0)$$

Así: $E_1 - E_0 = W_{fr} \Leftrightarrow \frac{1}{2} k \left(\delta_1^2 - \delta_0^2 \right) = -\mu M g (\delta_1 + \delta_0)$

$$\frac{1}{2} k (\delta_1 - \delta_0)(\delta_1 + \delta_0) = -\mu M g (\delta_1 + \delta_0)$$

$$\Rightarrow \quad \delta_1 = \delta_0 - \frac{2\mu M g}{k}$$

generalizando

$$\therefore \quad \boxed{\delta_{n+1} = \delta_n - 2\mu M g / k}$$