Pauta aux #9

- Resumen:

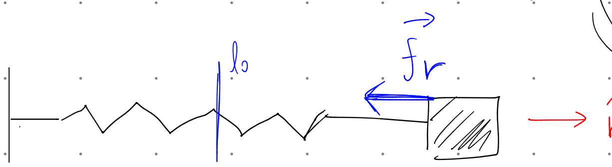
→ Ley de Hooke: $\vec{F}_r = -k\,(x - l_0)\,\hat{r}$

"posición" inicial del resorte → l_0 : largo natural

"posición" final del resorte → compresión o elongación

↳ notar que:

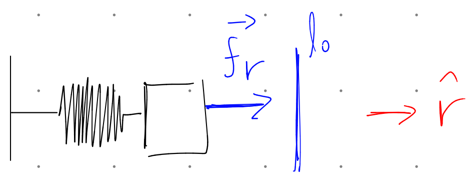
- $x - l_0 > 0 \Rightarrow x > l_0$ → elongación ∼ el resorte se quiere comprimir



$\vec{F}_r$ va en sentido contrario a $\hat{r}$

↳ $F_r = -k(x - l_0) < 0$

- $x - l_0 < 0 \Rightarrow x < l_0$ ∼ compresión ∼ el resorte se quiere elongar



$\vec{F}_r$ va en el mismo sentido que $\hat{r}$

↳ $F_r = -k(x - l_0) > 0$

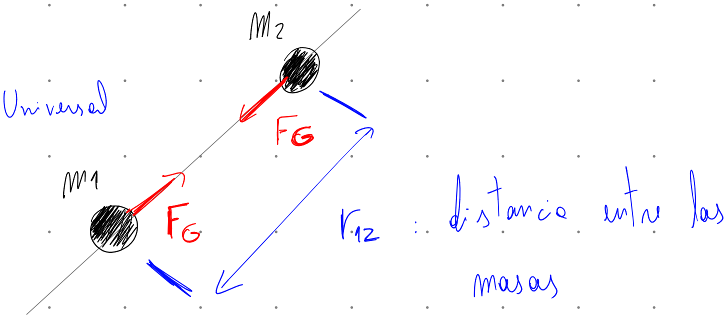
→ Gravitación:

↳ Ley de Gravitación Universal

cte de Gravitación Universal

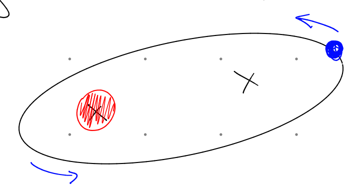
$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

↳ fza. atractiva

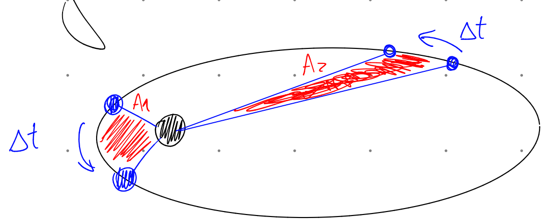


↳ Leyes de Kepler ⇝ a modo de completitud

1ra: los planetas siguen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos



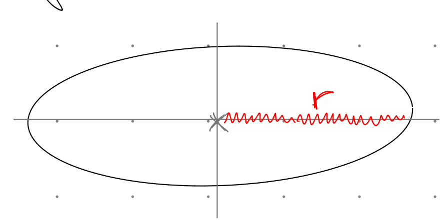
2do: el vector que une el Sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales



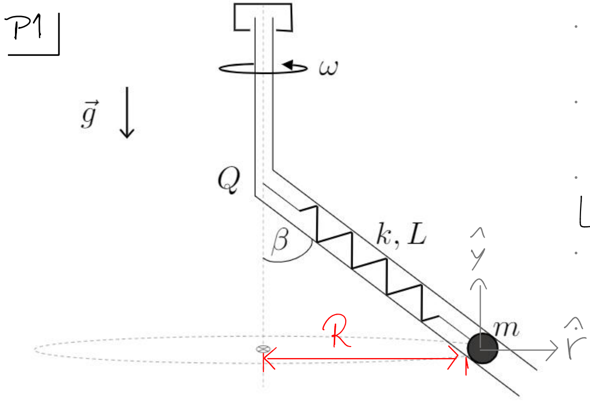
$A_1 = A_2$

3ra: $T^2 \propto r^3$ con r: semieje mayor de la elipse

$\iff \frac{T^2}{r^3} = \text{cte.}$



P1

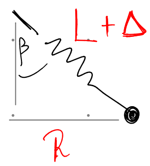


→ Determinar la elongación del resorte Δ

↳ Analicemos unos detalles.

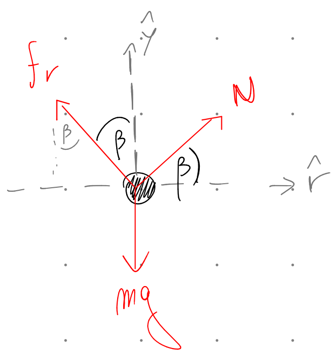
- El resorte, ¿se estira o comprime?
  ↳ se estira, pues se encarga de sujetar la masa
- Hay MCU ⇒ fuerza centrípeta

- Geometría del problema:



$\sim$ radio de giro $= R = (L+\Delta)\sin\beta$

→ Dicho esto, veamos cómo interactúan las fuerzas → DCL



$\hat{r}\rfloor\quad N\cos\beta - f_r\sin\beta = m\cdot a$

$\hat{y}\rfloor\quad N\sin\beta + f_r\cos\beta - mg = 0$

* notar que $\vec{f_r} \perp \vec{N}$, pues $\vec{f_r}$ es paralela a la superficie.

De $\hat{y}\rfloor$: $N = \dfrac{1}{\sin\beta}\left[mg - f_r\cos\beta\right]$

$\vec{a} = \vec{a}_c = -m\omega^2 R\,\hat{r}$

Reemplazando en $\hat{r}\rfloor$: $\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\left[mg - f_r\cos\beta\right] - f_r\sin\beta = m\cdot a = -m\omega^2 \underbrace{R}_{\text{radio de giro}}$ (1)

Recordemos que: $f_r = k\left[\underbrace{(L+\Delta)}_{\text{"largo final"}} - \underbrace{L}_{\text{largo natural}}\right] = k\Delta$

↳ Reescribiendo (1): $\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\left[mg - k\Delta\cos\beta\right] - k\Delta\sin\beta = -m\omega^2\overbrace{(L+\Delta)\sin\beta}^{R}$

$\Rightarrow \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}mg = \Delta\left[k\dfrac{\cos^2\beta}{\sin\beta} + k\sin\beta - m\omega^2\sin\beta\right] - m\omega^2 L\sin\beta$

$$\hookrightarrow \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\, mg + m\omega^2 L \sin\beta = \Delta\, \frac{1}{\sin\beta}\left[k(\underbrace{\cos^2\beta + \sin^2\beta}_{=1}) - m\omega^2 \sin^2\beta\right]$$

$$\therefore \boxed{\Delta = \frac{m\left(g\cos\beta + \omega^2 L \sin^2\beta\right)}{k - m\omega^2 \sin^2\beta}}$$

$\hookrightarrow$ Discutamos bajo qué condiciones $\Delta = 0$:

$\Delta = 0$ si $g\cos\beta + \omega^2 L \sin^2\beta = 0$ (2) $\rightsquigarrow$ ¿qué situación lo cumple?

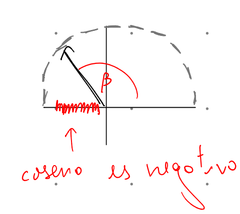
Reescribamos (2): $g\cos\beta + \omega^2 L(1 - \cos^2\beta) = 0 \iff -\omega^2 L \cos^2\beta + g\cos\beta + \omega^2 L = 0$

Resolvamos la cuadrática: $\cos\beta = -\dfrac{g \pm \sqrt{g^2 + 4(\omega^2 L)^2}}{-2\omega^2 L} = \dfrac{g \pm \sqrt{g^2 + 4(\omega^2 L)^2}}{2\omega^2 L}$ $(*)$

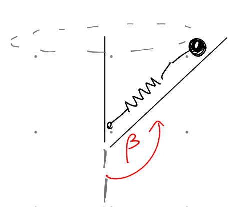
notemos que: $(*)_+ = \dfrac{g + \sqrt{4(\omega^2 L)^2 + g^2}}{2\omega^2 L} > \dfrac{\sqrt{4(\omega^2 L)^2}}{2\omega^2 L} = 1$ $\rightsquigarrow$ se descarta esta solución pues $\cos\beta \leq 1 \ \forall \beta$

Entonces nos quedamos con la solución:

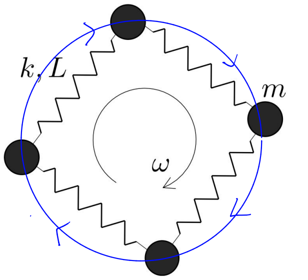
$$\cos\beta = \frac{g - \sqrt{g^2 + 4(\omega^2 L)^2}}{2\omega^2 L} < 0 \implies \beta > \pi/2$$



Por lo que Δ puede ser nulo cuando $\beta > \pi/2$, es decir:



P2



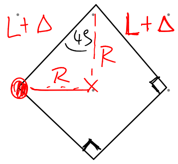
$\rightsquigarrow$ Obtener la elongación de los resortes

$\rightsquigarrow$ Hay que reconocer que ocurre un movimiento circular

$\Rightarrow$ hay fuerza centrípeta

$\rightsquigarrow$ ¿ Cuál es el radio de giro ?

Por geometría

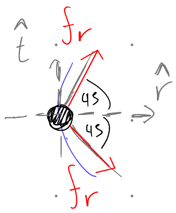


$$\sin 45 = \cos 45 = \frac{R}{L+\Delta} \Rightarrow R = (L+\Delta)\sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}(L+\Delta)$$

$\rightsquigarrow$ Como los resortes están estirados, entonces quieren comprimirse.

Dicho esto, armemos un DCL $\longrightarrow$ notar que 1 DCL basta en este caso

notar que definí $\hat{r}$ apuntando al centro



$$\hat{r}| \quad f_r \cos 45 + f_r \cos 45 = m \cdot a = m\omega^2 R$$

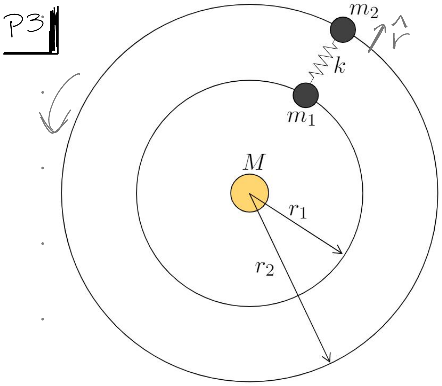
$$\Rightarrow 2 f_r \cos 45 = m\omega^2 R \Leftrightarrow \sqrt{2}\, f_r = m\omega^2 R \quad (1)$$

$\rightsquigarrow$ Pero : $|\vec{f_r}| = f_r = k\left[(L+\Delta) - L\right] = k\Delta$

$$\Rightarrow (1): \quad \sqrt{2}\, k\Delta = m\omega^2 \frac{\sqrt{2}}{2}(L+\Delta) \Rightarrow \Delta\left[\sqrt{2}\,k - m\omega^2\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = m\omega^2\frac{\sqrt{2}}{2}L$$

$$\therefore \boxed{\Delta = \frac{m\omega^2 L}{2k - m\omega^2}}$$

P3]



~ Determinar k si m_1 y m_2 poseen el mismo periodo

~ Como el periodo de las masas es el mismo y tenemos órbitas circunferenciales, entonces asumamos que se tiene MCU. Esto implica que solo hay aceleración radial, luego el resorte no "hace fuerza" en el eje tangencial.

↳ Notemos que $|\vec{f_r}| = f_r = k[(r_2 - r_1) - l_0] = k(r_2 - r_1)$

↑ $l_0 = 0$ por enunciado

Esto quiere decir que el resorte se quiere comprimir: tire al centro a m_2
empuje "hacia fuera" a m_1

Dicho esto, armemos los DCL's.

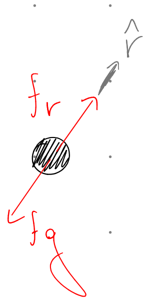
$\vec{a} = \vec{a}_c = -m\omega^2 R\,\hat{r}$

m_2]

$\hat{r}$] $\quad -f_g - f_r = m_2\, a = -m_2 \cdot \omega^2 r_2$

$$\Rightarrow \frac{GMm_2}{r_2^2} + k(r_2 - r_1) = m_2 \cdot \omega_2^2 r_2 \qquad (1$$

m_1]



$\hat{r}$] $\quad f_r - f_g = m_1\, a = -m_1 \omega^2 r_1$

$$\Rightarrow k(r_2 - r_1) - \frac{GMm_1}{r_1^2} = -m_1 \omega_1^2 r_1 \qquad (2$$

→ Como $\omega = 2\pi/T \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$, así obtenemos de (1) y (2)

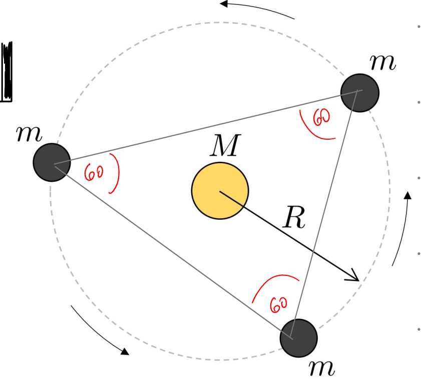
$$\omega^2 = \frac{GM}{r_2^3} + \frac{k(r_2 - r_1)}{m_2 r_2} = \frac{GM}{r_1^3} - \frac{k(r_2 - r_1)}{m_1 r_1}$$

$\rightsquigarrow$ De este última expresión tenemos.

$$k\,(r_2 - r_1)\left[\frac{1}{m_2 r_2} + \frac{1}{m_1 r_1}\right] = GM\left[\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{GM}{r_2 - r_1}\,\frac{m_2 r_2 \cdot m_1 r_1}{(m_1 r_1 + m_2 r_2)}\left[\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right]}$$

P4

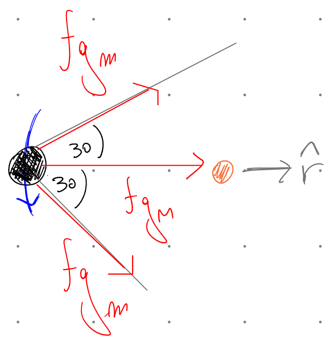


$\rightsquigarrow$ Rapidez de órbita de las masas

$\rightsquigarrow$ Análogo a los problemas anteriores: MCU $\Rightarrow$ fza. centrípeta

$\rightarrow$ Solo actúa fza. gravitacional

Armemos nuestro DCL $\rightsquigarrow$ por simetría del problema, basta solo 1!



$\vec{a} = \vec{a}_c$ ← notar que $\hat{r}$ está apuntando al centro!

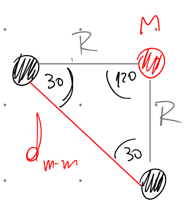
$$\hat{r}] \quad f_{g_m}\cos 30 + f_{g_M} + f_{g_m}\cos 30 = m \cdot a = m \cdot \frac{V^2}{R}$$

$$\Rightarrow 2 f_{g_m}\cos 30 + f_{g_M} = m\frac{V^2}{R} \qquad (*)$$

$\rightarrow$ Notemos que la distancia entre m y M es R

pero ¿la distancia entre m's?

↳ Geometría:



$\rightarrow$ teo del coseno:

$$d_{m-m}^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos(120)$$

$$d_{m-m}^2 = R^2 + R^2 + 2R^2 \cdot 1/2$$

$$d_{m-m}^2 = 3R^2$$

Dicho esto, la ecuación (*) queda:

$$2\frac{G m\cdot m}{d_{m-m}^2}\cos 30 + \frac{GMm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 = \frac{R}{m}\left[2\frac{Gm^2}{3R^2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{GMm}{R^2}\right]$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{Gm}{R} + \frac{GM}{R} = \frac{G}{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}m + M\right)$$

$$\therefore \boxed{V = \sqrt{\frac{G}{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}m + M\right)}}$$