

Pauta Aux #4

• Resumen

↳ Movimiento circular uniforme (MCU):

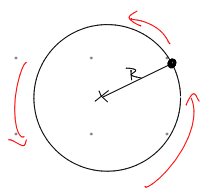
- frecuencia: $f = \frac{n^{\circ} \text{ vueltas}}{\text{tiempo}} \rightarrow \text{unidad SI: Hz} \rightarrow \frac{1}{\text{segundo}}$

- Periodo: $T = \frac{\text{tiempo}}{n^{\circ} \text{ vueltas}} \rightarrow \text{unidad SI: seg.}$

notar que: $f = 1/T$
 $T = 1/f$

→ De cinemática 1D sabemos que, en el caso $a=0$, la rapidez $v = \text{distancia} / \text{tiempo}$

Consideremos la siguiente situación:



si damos 1 vuelta
a rapidez constante

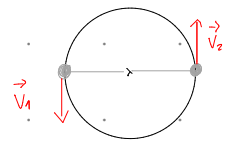
distance = perimetro = $2\pi R$
tiempo = 1 periodo

$$\Rightarrow v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f$$

→ Notar que, si bien la rapidez es constante, la velocidad no lo es!

Pues hay un cambio en la dirección:

la velocidad es perpendicular
a la posición $\vec{v} \perp \vec{r}$
por eso se le dice *vel. tangencial*!



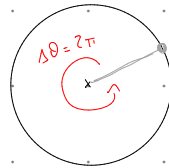
$|\vec{v}_2| = |\vec{v}_1| \rightarrow \text{los tamaños son iguales}$

$\vec{v}_2 \neq \vec{v}_1 \rightarrow \text{los vectores son distintos} \rightarrow \text{por la dirección}$

→ Se introduce la rapidez (velocidad) angular $\rightarrow$ análogo a la rapidez lineal

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

→ Considerando 1 vuelta
a rapidez cte.



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

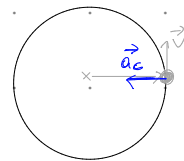
→ independiente
del radio

→ Comparando expresiones: $v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$v = \omega R$$

→ Como hay un cambio en la velocidad $\Rightarrow$ hay aceleración!



→ en el caso MCU, la aceleración siempre apunta al centro aceleración centrípeta

$$\vec{a}_c = \frac{v^2}{R} \overset{\text{hacia el centro}}{(-\hat{r})} = \omega^2 R (-\hat{r})$$

→ Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA):

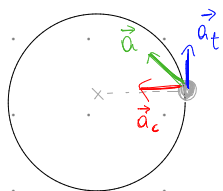
Consiste en el caso cuando la rapidez no es constante

→ la velocidad tangencial ya no tan solo cambia de dirección, sino que también de tamaño

→ se debe a la presencia de otra ~~aceleración~~ que actúe en la dirección tangencial.

aceleración tangencial $a_t = \frac{\Delta v_t}{\Delta t}$ $\rightarrow$ corresponde a la tasa de cambio de la rapidez tangencial

→ gráficamente:
(un caso)



$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

→ aceleración neta = ac. centrípeta + ac. tangencial

→ Como $\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \omega$ también se ve afectado por esta aceleración

→ esto introduce la aceleración angular

ac. angular: $\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ $\rightarrow$ corresponde a la tasa de cambio de la velocidad angular

$$\text{Como } \Delta \omega = \frac{\Delta v}{R} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{R} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{1}{R} a_t \Rightarrow a_t = \alpha R$$

↑ ac. tangencial

$$\text{Dicho esto: } \vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t = \frac{v^2}{R} \overset{\text{al centro}}{(-\hat{r})} + \alpha R \overset{\rightarrow \text{tangencial}}{(\hat{t})}$$

↳ Dicho esto, notemos la analogía:

distancia $\rightarrow \theta = x/R$

velocidad $\rightarrow \omega = v/R$

aceleración $\rightarrow \alpha = a_t/R$

esto nos lleva a las ecuaciones cinemáticas para ángulos:

$$\bullet \theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\bullet \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\bullet \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$$

↳ Movimiento Relativo:

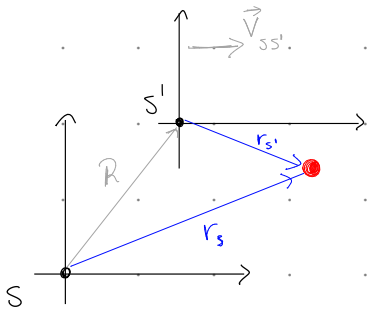
Cuando podemos estudiar un movimiento bajo distintos sistemas de referencia que se mueven entre sí:

S, S': sistemas $\rightarrow$ S' se mueve a cierta velocidad

R: vector posición del sistema S' en el sistema S

$r_{S'}$: posición medida en el sistema S'

r_S : posición medida en el sistema S



Es fácil escribir, por suma de vectores que: $\vec{r}_S = \vec{R} + \vec{r}_{S'}$

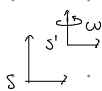
↳ Con derivadas se puede llegar a:

$$\vec{v}_S = \vec{v}_{SS'} + \vec{v}_{S'}$$

$$\vec{a}_S = \vec{a}_{SS'} + \vec{a}_{S'}$$

tienen que identificar bien cuál es el sistema S y S'

* nota: en mecánica verán esto nuevamente con mayor profundidad, en específico, agregarán que al sistema S' note

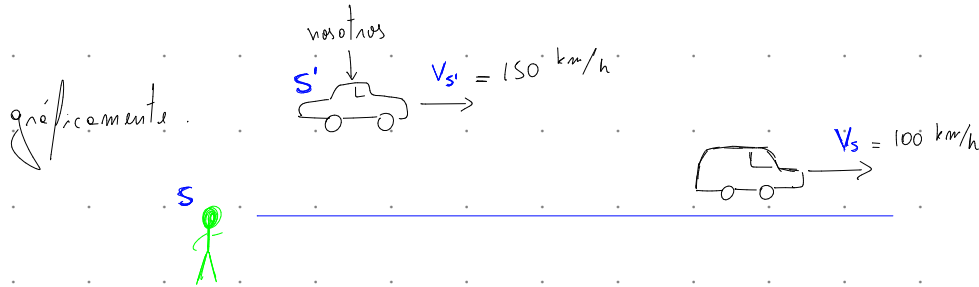


↳ con esto surgen las denominadas fuerzas ficticias, algunas de ellas son: fze. centrífuga y la fze. de Coriolis.

no confundir con centripeta

→ Ej. de movimiento relativo: autos en la autopista

Consideremos que vamos en una autopista a unos 150 km/h , mientras que los demás autos respetan el límite de velocidad 100 km/h → ¿cómo vemos los autos? ¿se acercan?



S : un policía → multa
 S' : nosotros → exceso de velocidad

→ sabemos que $\vec{V}_S = \vec{V}_{SS'} + \vec{V}_{S'}$

Como queremos saber el comportamiento de los autos con respecto a nosotros:

$$\vec{V}_{S'} = \vec{V}_S - \vec{V}_{SS'}$$

→ mide la velocidad en S'

$\vec{V}_S = 100 \text{ km/h}$ → mide la vel. en S : lo que mide el policía

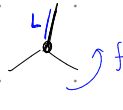
$\vec{V}_{SS'} = 150 \text{ km/h}$ → la vel. del sistema de referencia S' , en este caso, nosotros

Así: $\vec{V}_{S'} = (100 - 150) \text{ km/h} = -50 \text{ km/h}$ → en donde el signo menos tiene mucho sentido, pues vemos que los autos se acercan a nosotros

→ Vectorialmente → suele ayudar a visualizar

$$\vec{V}_{S'} = \vec{V}_S - \vec{V}_{SS'}$$

Pl Ventilador

 $\rightarrow$ deja de girar a un tiempo τ

a) • aceleración angular:

Recordemos que $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$

$\hookrightarrow$ como en un tiempo τ se detiene: $\omega(\tau) = 0 = \omega_0 + \alpha \tau \Rightarrow \alpha = \frac{-\omega_0}{\tau}$ negativo, pues nos va frenando

Como el ventilador rota a frecuencia $f \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f$ $\therefore \alpha = -\frac{2\pi f}{\tau}$

• n° de vueltas antes de parar:

notemos que $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ puede ser mayor a 2π (rad) $\rightarrow \theta(t)$ va avanzando

pero sabemos que 1 vuelta equivale a 2π (rad), entonces:

$$\text{n° vueltas} = \frac{\theta(\tau)}{2\pi \text{ (rad)}} = \frac{1}{2\pi} \left(\theta_0 + \omega_0 \tau + \frac{1}{2} \alpha \tau^2 \right) = \frac{1}{2\pi} \left(2\pi f \tau + \frac{1}{2} \left(-\frac{2\pi f}{\tau} \right) \tau^2 \right) = \frac{\pi f \tau}{2\pi} = \frac{f \tau}{2}$$

b) $t = \tau/2$

• Rapidez tangencial:

$\hookrightarrow$ sabemos que $v = \omega R \rightarrow$ determinemos $\omega(\tau/2)$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = 2\pi f - \left(\frac{2\pi f}{\tau} \right) t \Rightarrow \omega(\tau/2) = 2\pi f - \frac{2\pi f}{\tau} \cdot \frac{\tau}{2} = \pi f \Rightarrow v(\tau/2) = \pi f \cdot L$$

• ac. radial:

$$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{R} \hat{r} = -\frac{(\pi f L)^2}{L} \hat{r} = -\pi^2 f^2 L \hat{r}$$

• ac. tangencial:

$$\vec{a}_t = \alpha R = -\frac{2\pi f}{\tau} L \hat{t}$$

$$\pi^4 f^4 L^2 + \frac{4\pi^2 f^2 L^2}{\tau^2} = \pi^2 f^2 L^2 \left(\pi^2 f^2 + \frac{4}{\tau^2} \right)$$

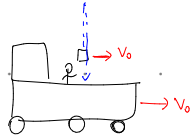
• ac. total:

$$\vec{a}_n = \vec{a}_c + \vec{a}_t = -\pi^2 f^2 L \hat{r} - \frac{2\pi f}{\tau} L \hat{t} \rightarrow |\vec{a}_n| = a_n = \sqrt{(\pi^2 f^2 L)^2 + \left(\frac{2\pi f L}{\tau} \right)^2} = \pi f L \sqrt{\pi^2 f^2 + \frac{4}{\tau^2}}$$

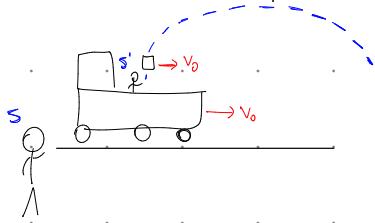
P2 Tren : $\vec{V}_T = v_0 \hat{i}$, malte : $\vec{V}_m = u_0 \hat{j}$

a) Trayectoria de la malte según el maquinista

El maquinista lanza la malte con $\vec{V}_m = u_0 \hat{j} \rightarrow$ no hay cambio en el sistema de referencia por lo que verá un movimiento netamente vertical:



b) Observador en reposo:



$\rightarrow$ verá un mov. parabólico ¿Por qué?

problema lanzamiento de proyectil

Recordemos que: $\vec{V}_S = \vec{V}_{SS'} + \vec{V}_{S'}$ $\rightarrow \vec{V}_S = \vec{V}_{tren} + \vec{V}_{malte}(t) = v_0 \hat{i} + (u_0 - gt) \hat{j}$

$\vec{r}_S = \vec{r} + \vec{r}_{S'}$

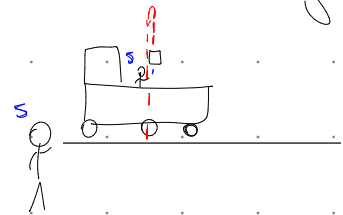
$\rightarrow$ nos piden el desplazamiento

el tiempo total del movimiento: $y_{S'}(t) = y_{S'0} + v_{y_{S'0}} t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = 0 + ut - \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow t_{vuelo} = \frac{2u}{g}$

así:

desplazamiento = $\vec{r}_S(t_2) - \vec{r}_S(t_1) = (\vec{r}_{tren}(t_2) - \vec{r}_{tren}(t_1)) + (\vec{r}_{S'}(t_2) - \vec{r}_{S'}(t_1)) = v_0 \cdot t_{vuelo} \hat{i} = v_0 \cdot \frac{2u}{g} \hat{i}$

c) La malte es lanzada con $\vec{V}_m = -v_0 \hat{i} + u_0 \hat{j}$, según largo L



$\sim$ el observador S verá un movimiento netamente vertical!

¿Por qué? $\vec{V}_S = \vec{V}_{tren} + \vec{V}_{S'} = v_0 \hat{i} + (-v_0 \hat{i} + u_0 \hat{j}) = u_0 \hat{j}$

d) v_0 mín. para caer en el k-ésimo vagón.

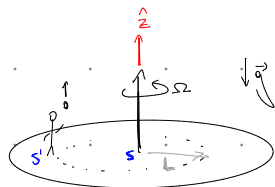
Analicemos el movimiento según S.

Para caer en el k-ésimo vagón, el tren se tiene que mover lo suficiente mientras la malte está en el aire.

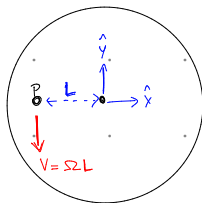
el tiempo de vuelo es $t_v = \frac{2u_0}{g} \Rightarrow$ el tren se tiene que mover: $d = (k-1)L$

$\Rightarrow v_0 = \frac{(k-1)L}{t_{vuelo}} = \frac{(k-1)L}{\frac{2u_0}{g}} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{(k-1)Lg}{2u_0}}$

P3



visto desde arriba



→ medamos /r a S:

para ello vamos a la velocidad de la moneda en este instante:

$$\vec{V}_S = \vec{V}_{SS'} + \vec{V}_{S'} = (-\Omega L \hat{y}) + (v_0 \hat{z})$$

• Tiempo que demora en caer la moneda:

esto está dado notadamente por v_0 en $\hat{z}$. $z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow z(t_v) = 0 = v_0 t_v - \frac{1}{2}gt_v^2 \Rightarrow t_v = \frac{2v_0}{g}$

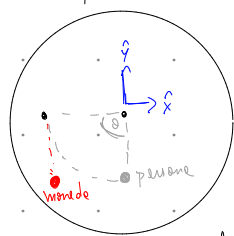
nada distinto hasta acá, pues $\hat{z}_S = \hat{z}_{S'} = \hat{z}$

• Lugar donde cae la moneda según la persona.

Para esta parte del problema hay que notar lo siguiente:

como la moneda sale con una velocidad tangencial, este seguirá en línea recta hasta caer (según $\hat{y}$).

mientras que eso pasa, la persona sigue su movimiento circular:



sabemos que la posición de la moneda al llegar al suelo será:

$$\vec{r}_m(t_v) = -L\hat{x} - \Omega L t_v \hat{y} = (-L)\hat{x} + \left(-\frac{2v_0 L \Omega}{g}\right)\hat{y}$$

→ la posición de la persona aplicamos lo que sabemos de trigonometría.

$$\vec{r}_p(t) = -L \cos \theta \hat{x} - L \sin \theta \hat{y} \Rightarrow \vec{r}_p(t_v) = -L \cos(\theta(t_v)) \hat{x} - L \sin(\theta(t_v)) \hat{y}$$

→ en donde $\theta(t_v) = \theta_0 + \Omega t_v = \frac{2v_0 \Omega}{g} \Rightarrow \vec{r}_p(t_v) = -L \cos\left(\frac{2v_0 \Omega}{g}\right) \hat{x} - L \sin\left(\frac{2v_0 \Omega}{g}\right) \hat{y}$

Finalmente, para calcular la posición de la moneda según la persona, hay que recordar:

$$\vec{r}_S = \vec{R} + \vec{r}_{S'} \Rightarrow \vec{r}_{S'} = \vec{r}_S - \vec{R} = \vec{r}_{\text{moneda}} - \vec{R}_{\text{persona}}$$

$$= L \left(\cos\left(\frac{2v_0 \Omega}{g}\right) - 1 \right) \hat{x} + L \left(\sin\left(\frac{2v_0 \Omega}{g}\right) - \frac{2v_0 L \Omega}{g} \right) \hat{y}$$

* tiene sentido? si tomamos $\Omega = 0$ $\vec{r}_{S'} = 0 \rightarrow$ lo que es esperado!