

Parte auxilia #2

• Resumen:

↳ Vectores en cinemática:

• $\vec{r}$: vector posición $\rightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

• $\vec{v}$: vector velocidad $\rightarrow$ caracteriza la tasa de cambio de $\vec{r}$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{\text{final}} - \vec{r}_{\text{inicial}}}{t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}}$$

• $\vec{a}$: vector aceleración $\rightarrow$ caracteriza la tasa de cambio de $\vec{v}$

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_{\text{final}} - \vec{v}_{\text{inicial}}}{t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}}$$

↳ ¿Cómo se relacionan?

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + a \cdot t$$

$\vec{r}_0$: posición inicial

$\vec{v}_0$: velocidad inicial

a : aceleración $\rightarrow$ constante

Ecuación de
itinerario $\rightarrow$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$

• Torricelli: $v_f^2 = v_i^2 + 2a \cdot d \rightarrow$ independiente del tiempo!

$\rightarrow$ deducción:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} \Rightarrow t = \frac{v_f - v_i}{a}$$

$\rightarrow$ Reemplazar
en ec. de
itinerario

↳ Caída libre:

si definimos nuestro eje $\hat{y}$ como:

elección de gravedad

dirección! $\rightarrow$ hacia abajo

$$\vec{g} = g(-\hat{y}) = -g\hat{y}$$

módulo $\rightarrow$ "tamaño del vector"

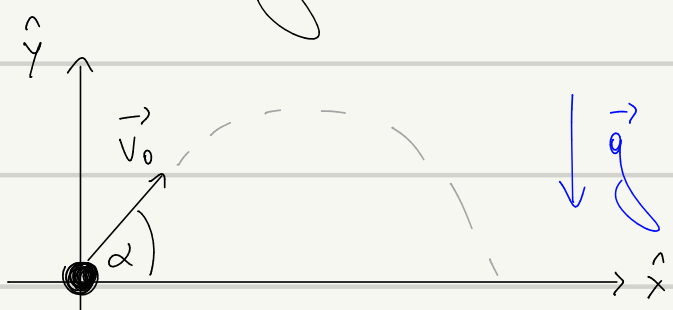
$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2$$

• si el movimiento ocurre solo en este eje:

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad \text{y} \quad v(t) = v_0 - g \cdot t$$

↳ negativo porque, según nuestra elección de $\hat{y}$, $\vec{g}$ nos desacelera

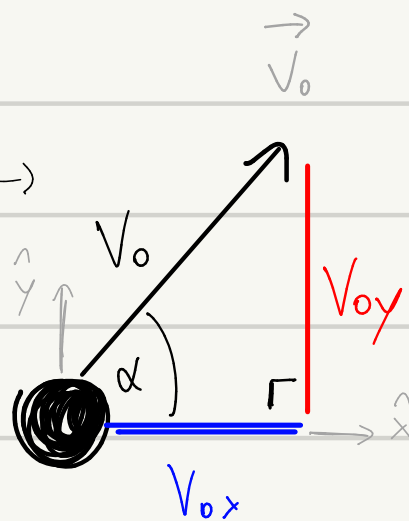
↳ Lanzamiento de proyectil



Movimiento en 2D:

- $x(t) \rightarrow a=0$ (MRU) $\Rightarrow x(t) = x_0 + v_{0x} \cdot t$ y $v_x(t) = v_{0x}$
- $y(t) \rightarrow \vec{a} = -\vec{g}$ $\Rightarrow y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$ y $v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t$

¿ v_{0x} , v_{0y} ?



- $\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{x} + v_{0y} \hat{y}$
- Del triángulo rectángulo:

$$\cos \alpha = \frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{v_{0y}}{v_0} \Rightarrow v_{0y} = v_0 \sin \alpha$$

Importante:

no memorizar

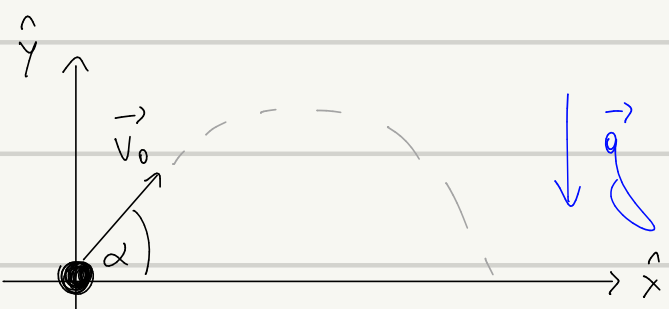
$v_{0x} \propto \cos \alpha$

$v_{0y} \propto \sin \alpha$

α : proporcional

depende de cómo se define el ángulo!
 $\Rightarrow$ armar el triángulo rectángulo para deducir!

Volvamos a:



$$x(t) = x_0 + v_0 \cos \alpha \cdot t$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - g t$$

→ Derivamos ecuaciones:
vuelve a la misma altura

• Tiempo de vuelo: $y(t_v) = y_0 \Rightarrow y(t_v) = \cancel{y_0} = \cancel{y_0} + v_0 \sin \alpha \cdot t_v - \frac{1}{2} g t_v^2$

$$0 = t_v \left[v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_v \right] = 0$$

como $t_v \neq 0$: $t_v = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$

• Distancia horizontal recorrida: $x(t_v) = x_0 + v_0 \cos \alpha \cdot t_v \leadsto D = \overset{x_{\text{final}}}{x(t_v)} - x_0$

$$\Rightarrow D = v_0 \cos \alpha \cdot \left(\frac{2 v_0 \sin \alpha}{g} \right) = v_0^2 \frac{\sin(2\alpha)}{g}$$

∴ $D = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$

→ recordando que $\max(\sin \beta) = 1$ cuando $\beta = \pi/2 = 90^\circ$

$\Rightarrow D$ es máximo para $2\alpha = 90^\circ \leadsto \alpha = 45^\circ$

• Tiempo para alcanzar altura máxima:

↳ Sabemos que en la altura máxima: $v(t^*) = 0 = v_{0y} - g \cdot t^* \Rightarrow t^* = \frac{v_{0y}}{g}$

• Altura máxima:

$$y(t^*) = y_{\text{max}} = y_0 + v_{0y} \cdot t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = y_0 + v_{0y} \left(\frac{v_{0y}}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g} \right)^2 = y_0 + \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

↳ Análisis dimensional:

longitud	→	L	SI: m
mase	→	M	SI: kg
tiempo	→	T	SI: s

La idea es reemplazar nuestras variables por lo que representan, así verificamos si nuestros cálculos van bien encaminados.

Por ejemplo:

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

$\downarrow$
 $[M]$
 $\downarrow$
 $[M]$

$\downarrow$
 $[M]$
 $\downarrow$
 $[M]$

$\downarrow$
 $\left[\frac{M}{T} \cdot T \right]$
 $\downarrow$
 $[M]$

$\downarrow$
 $\left[\frac{M}{T^2} \cdot T^2 \right]$
 $\downarrow$
 $[M]$

$$[M] = [M]$$

→ esto quiere decir que todos nuestros términos representan una distancia

↳ Recordar que no se pueden sumar/restar "cosas" distintas:

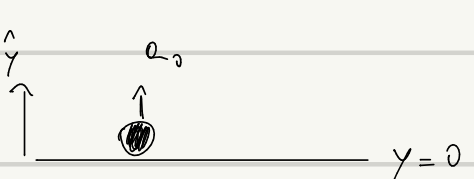
y:

posición + velocidad + aceleración ✗

velocidad + velocidad ✓

Tiempo + posición ✗

P1 | Cohete



$$a(t) = \begin{cases} a_0 & , t \leq \tau \\ -g & , t \geq \tau \end{cases}$$

a) Altura máxima.

→ Hay que reconocer que el movimiento presenta 2 etapas:

- 1^{ra}: con la aceleración a_0 llega a una cierta altura con cierta velocidad
- 2^{da}: al llegar a la altura anterior seguirá subiendo, pero cada vez más lento, hasta detenerse por efectos de $\vec{g}$

1^{ra} etapa

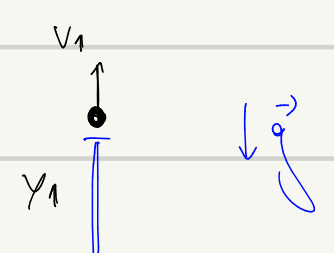
$$y(t) = \cancel{y_0} + \cancel{v_0} \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2 = \frac{1}{2} a_0 t^2 \Rightarrow y(\tau) = y_1 = \frac{1}{2} a_0 \tau^2 \quad \leftarrow \text{altura alcanzada en 1^{ra} etapa}$$

punto del suelo y del reposo

Por otro lado: $v(t) = \cancel{v_0} + a \cdot t \Rightarrow v(\tau) = v_1 = a_0 \tau \quad \leftarrow \text{con esta velocidad llega en la 1^{ra} etapa.}$

2^{da} etapa

Para conocer cuál es la altura máxima, necesitamos saber el tiempo transcurrido en que el cohete se detiene, para luego reemplazar en nuestra ecuación de itinerario



$$\leadsto v(t_{\text{stop}}) = 0 = v_1 - g \cdot t_{\text{stop}} \Rightarrow t_{\text{stop}} = \frac{v_1}{g} = \frac{a_0 \tau}{g}$$

Reemplazando en la ec. de itinerario:

$$y(t_{\text{stop}}) = y_{\text{max}} = y_1 + v_1 \cdot t_{\text{stop}} - \frac{1}{2} g t_{\text{stop}}^2 = \frac{1}{2} a_0 \tau^2 + a_0 \tau \left(\frac{a_0 \tau}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{a_0 \tau}{g} \right)^2$$

$$\Rightarrow y_{\text{max}} = a_0 \tau^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{a_0}{g} - \frac{1}{2} \frac{a_0}{g} \right) = a_0 \tau^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{a_0}{2g} \right)$$

$$\therefore y_{\text{max}} = \frac{a_0 \tau^2}{2} \left(1 + \frac{a_0}{g} \right)$$

→ análisis dimensional

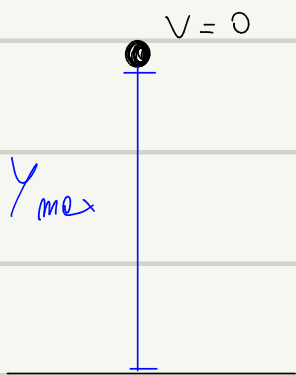
$$\frac{L}{T^2} \cdot T^2 \left(\frac{L/T^2}{L/T^2} \right) = L : \text{longitud} \quad \checkmark$$

b) $T_{\text{tempo total del vuelo:}}$

↳ entonces que tenemos el tiempo que tardó en subir: $t_{\uparrow} = \tau + t_{stop} = \tau + \frac{a_0 \tau}{g} = \tau \left(1 + \frac{a_0}{g} \right)$

Así que nos falte el tiempo que tarde en bajar.

Le podemos determinar a partir de la ejecución del itinerario:



$$y(t_{\downarrow}) = 0 = y_{\max} + \overset{0}{v_0} \cdot t_{\downarrow} - \frac{1}{2} g t_{\downarrow}^2 \Rightarrow t_{\downarrow} = \sqrt{\frac{2 y_{\max}}{g}}$$

como $y_{\max} = \frac{a_0 T^2}{2} \left(1 + \frac{a_0}{g} \right) \Rightarrow t_{\downarrow} = \sqrt{\frac{a_0 T^2}{g} \left(1 + \frac{a_0}{g} \right)} = T \sqrt{\frac{a_0}{g} \left(1 + \frac{a_0}{g} \right)}$

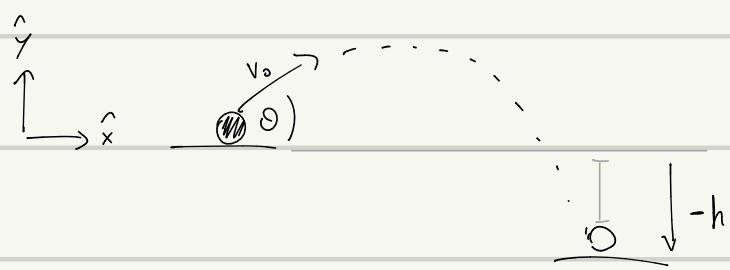
Finalmente, el tiempo total transcurrido es:

$$T = T_{\uparrow} + T_{\downarrow} = T \left(1 + \frac{a_0}{g} \right) + T \sqrt{\frac{a_0}{g} \left(1 + \frac{a_0}{g} \right)}$$

$$\overline{T} = T \left[\left(1 + \frac{Q_0}{q} \right) + \sqrt{\frac{Q_0}{q} \left(1 + \frac{Q_0}{q} \right)} \right]$$

↳ análisis dimensional: $T = T [\text{número}]$
 $\uparrow$ Tiempo ✓✓

P2 | Volcán



a) Tiempo total de vuelo:

→ analicemos lo que sucede en el eje $\hat{y}$:

$$y(t_v) = -h = y_0 + v_{0y} \cdot t_v + \frac{1}{2} a \cdot t_v^2$$

Como lo planteé el problema $y_0 = 0$; $v_{0y} = v_0 \sin \theta$ y $a = -g$

Reemplazando: $-h = v_0 \sin \theta \cdot t_v - \frac{1}{2} g t_v^2$ Reordenando → $-\frac{1}{2} g t_v^2 + v_0 \sin \theta \cdot t_v + h = 0$

Obtenemos t_v de la ec. cuadrática:

$$t_v = \frac{-v_0 \sin \theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta - 4(-\frac{1}{2}g)(h)}}{2(-\frac{1}{2}g)} = \frac{v_0 \sin \theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g}$$

Como $t_v > 0$: $t_v = \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g}$ → análisis dimensional: $\frac{L/T + \sqrt{L^2/T^2}}{L/T^2} = T \rightarrow \text{tiempo}$

→ Reemplazando numéricamente: $\theta = 35^\circ$ $h = 20 \text{ m}$ $\Rightarrow t_v = 3.89 \text{ seg}$
 $v_0 = 25 \text{ m/s}$ $g = 10 \text{ m/s}^2$

b) Magnitud de la velocidad al impactar.

Cuando impacte: $\Rightarrow |\vec{v}_f| = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2}$

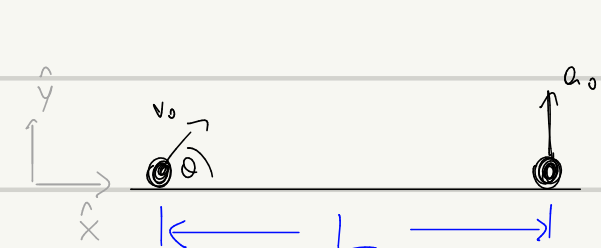
• $v_{fx} = v_{0x} = v_0 \cos \theta$ ← es directo, pues v_{0x} se mantiene cte. → no hay aceleración en $\hat{x}$

• v_{fy} ?

$$v_{fy} = v_{0y} - g \cdot t = v_0 \sin \theta - g \cdot t_v = v_0 \sin \theta - g \left(\frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g} \right) = -\sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}$$

∴ $|\vec{v}_f| = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta + v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh} = \sqrt{v_0^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2gh} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \stackrel{\text{calculadora}}{\approx} 32.01 \text{ m/s}$

P3 | Cañón - Cohete.



¿ v_0 ?
 → juntamos la información:
 • choque $\Rightarrow$

$$\text{posición proyectil} = \text{posición cohete}$$

el proyectil recorre L ($\hat{x}$) y en ese tiempo esté a la misma altura que el cohete ($\hat{y}$)

$$\begin{aligned} v_0 \cos \theta &= v_{0x} \\ v_0 \sin \theta &= v_{0y} \end{aligned}$$

→ Metiendo esa idea: sea t_* el instante que ocurre el choque

$$\hat{x} \mid x(t_*) = L = \cancel{x_0} + v_{0x} \cdot t_* + \frac{1}{2} \cancel{a_x} \cdot t_*^2 \Rightarrow L = v_0 \cos \theta \cdot t_* \quad \therefore t_* = \frac{L}{v_0 \cos \theta}$$

$\hat{y} \mid$ altura cohete = altura proyectil $\rightarrow$ no las conocemos, pero las podemos obtener.
 $y_c = y_p$

$$\rightarrow \text{Cohete: } y_c(t_*) = \cancel{y_0} + \cancel{v_0} \cdot t_* + \frac{1}{2} a \cdot t_*^2 \Rightarrow y_c(t_*) = \frac{1}{2} a_0 t_*^2$$

$$\rightarrow \text{Proyectil: } y_p(t_*) = \cancel{y_0} + v_{0y} \cdot t_* + \frac{1}{2} \cancel{a} \cdot t_*^2 = v_0 \sin \theta \cdot t_* - \frac{1}{2} g t_*^2$$

$$\text{Como } y_c(t_*) = y_p(t_*) : \frac{1}{2} a_0 t_*^2 = t_* \left(v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t_* \right) \quad / : t_*$$

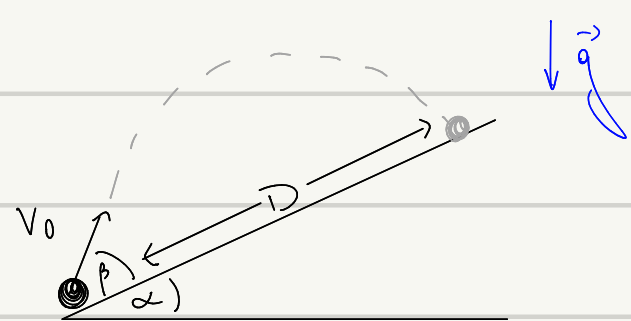
$$\Rightarrow \frac{1}{2} a_0 t_* = v_0 \sin \theta - \frac{1}{2} g t_*$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{t_*}{2 \sin \theta} (a_0 + g)$$

$$\text{Pero } t_* = \frac{L}{v_0 \cos \theta} : v_0 = \frac{L}{2 v_0 \sin \theta \cos \theta} (a_0 + g) \quad \therefore v_0 = \sqrt{\frac{L(a_0 + g)}{2 \sin \theta \cos \theta}}$$

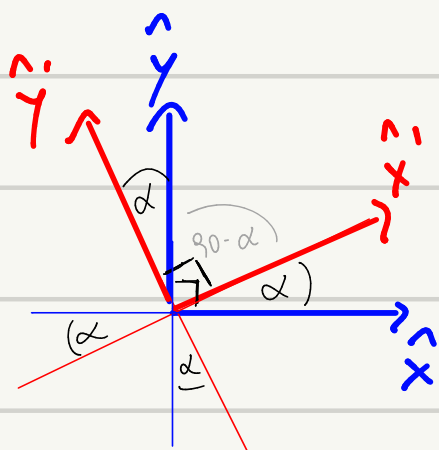
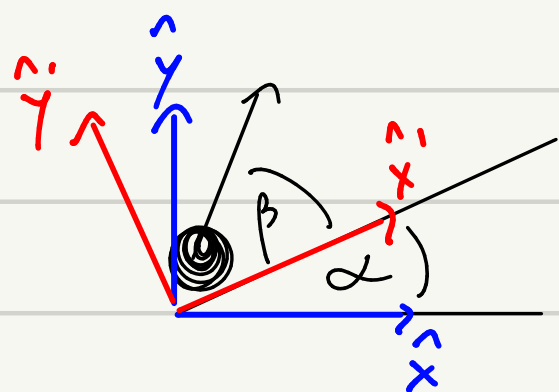
$$\rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$$

P4 | Plano inclinado Δ



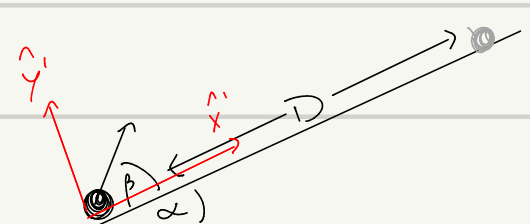
$\hat{c}D$? una manera de solucionarlo es trabajar tal cual lo hemos hecho con las ecuaciones de itinerario e imponer las condiciones necesarias.

Pero vamos a resolver este problema de otra manera: rotar el sistema de referencia



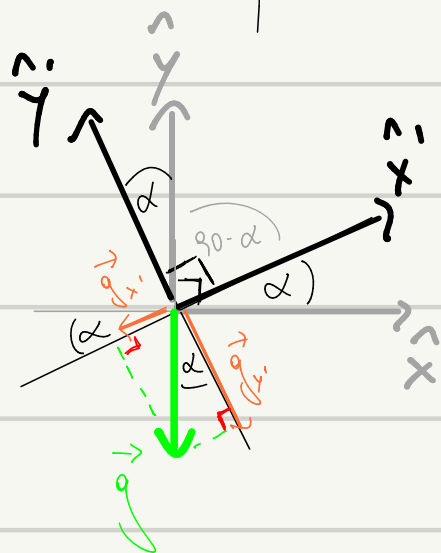
$$\hat{x} \perp \hat{y}$$

$$\hat{x}' \perp \hat{y}'$$



le gracia es que "D" está a lo largo del eje $\hat{x}'$

ya, pero este truguito tiene un costo: $\vec{g} = -g \hat{y}$ tendrá proyecciones en $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$



Por trigonometría: $\vec{g}_{y'} = -g \cos \alpha \hat{y}'$ y $\vec{g}_{x'} = g \sin \alpha \hat{x}'$

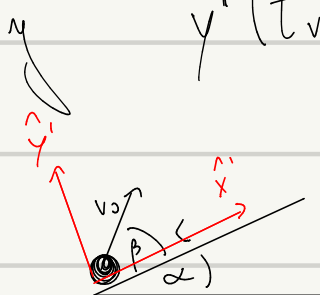
Por lo que ahora tendremos un movimiento desacoplado en $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$

$\rightarrow$ Sea t_v el tiempo de vuelo:

notemos que $\rightarrow x'(t_v) = D$

$y'(t_v) = y_0 = 0 \rightarrow$ la altura inicial

$\rightarrow$ antes de armar las ec. de itinerario.



$$v_{0x'} = v_0 \cos \beta$$

$$v_{0y'} = v_0 \sin \beta$$

Entonces: y' $y'(t_v) = 0 = \hat{y}_0 + v_{0y'} \cdot t_v - \frac{1}{2} g \cos \alpha t_v^2 = t_v \left[v_0 \sin \beta - \frac{1}{2} g \cos \alpha t_v \right] = 0$

$$\Rightarrow t_v = \frac{2 v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha}$$

$\rightarrow$ esto se reemplaza en la ec. de itinerario para x' , pues:
 $x'(t_v) = D$

$$\boxed{x'} \quad x'(t_v) = D = \cancel{x_0} + \overbrace{v_0 \cos \beta}^{v_{0x'}} t_v - \frac{1}{2} \overbrace{g \sin \alpha}^{g_{x'}} t_v^2$$

$$\Rightarrow D = v_0 \cos \beta \cdot \frac{2 v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot \left(\frac{2 v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha} \right)^2$$

$$= \frac{2 v_0^2 \cos \beta \sin \beta}{g \cos \alpha} - \frac{2 v_0^2 \sin \alpha \sin^2 \beta}{g \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2 v_0^2 \sin \beta}{g \cos \alpha} \left[\cos \beta - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha} \right]$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$= \frac{2 v_0^2 \sin \beta}{g \cos \alpha} \left[\cos \beta - \tan \alpha \sin \beta \right]$$

$\rightarrow$ se puede seguir simplificando pero por ahora no es necesario

¿qué pasa cuando $\alpha = 0$?