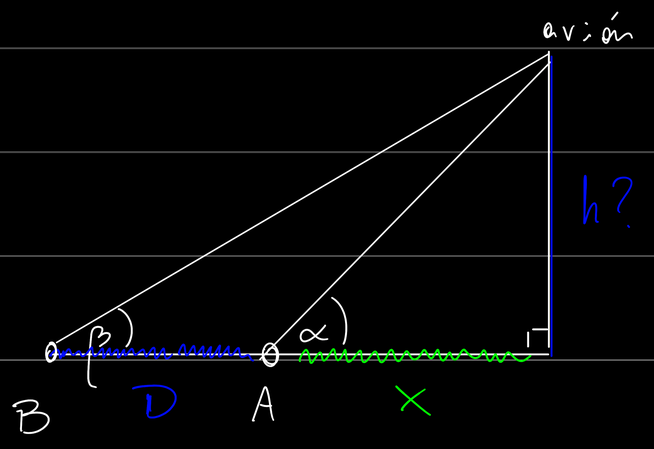
Pauta auxiliar #0

↳ Antes de empezar revisar el resumen de trigonometría subido a material docente

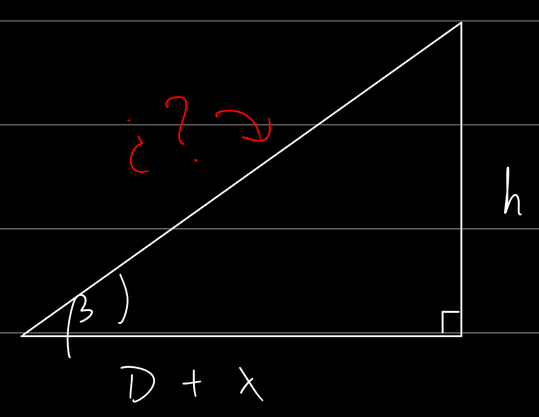
P1 (La del avión)

↳ La situación se reduce al siguiente problema geométrico:



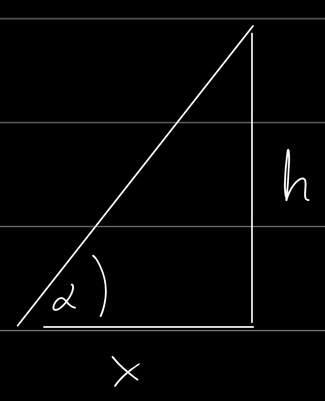
⇝ voy a definir la variable x como la proyección de la posición del avión en el suelo hasta el punto A.

⇝ ahora, analicemos los triángulos rectángulos para aplicar relaciones trigonométricas



⇝ como a priori no tengo información de la hipotenusa de este triángulo, podemos relacionar los catetos utilizando la tangente:

$$\boxed{\tan\beta = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. adyacente}} = \frac{h}{D+x}} \quad (1)$$



⇝ análogamente tendremos que:

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{h}{x}} \quad (2)$$

Recordemos que la variable x no es dato del problema. Por otro lado, como conocemos α y β, $\tan\alpha$ y $\tan\beta$ son valores conocidos.

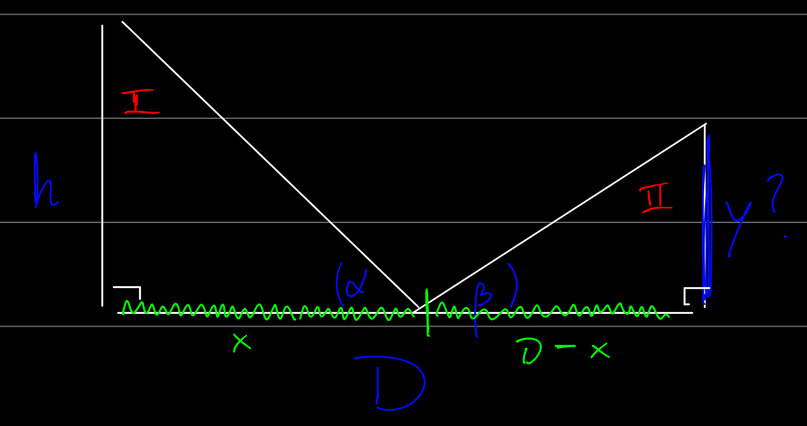
↳ De (1): $D + x = \dfrac{h}{\tan\beta}$ (3) y de (2): $x = \dfrac{h}{\tan\alpha}$ (4)

Reemplazando (4) en (3): $D + \dfrac{h}{\tan\alpha} = \dfrac{h}{\tan\beta} \Rightarrow h\left(\dfrac{1}{\tan\beta} - \dfrac{1}{\tan\alpha}\right) = D$

$$\therefore\ h = \frac{D\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} \overset{\text{calculadora}}{\approx} 1.628\,D = \boxed{1.628\ \text{km} \approx h}$$

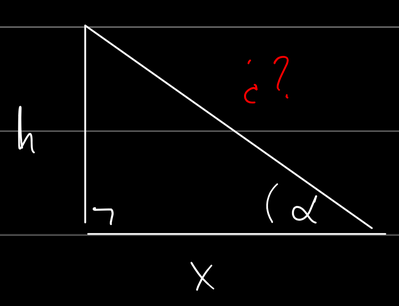
P2 (Las montañas)

↳ La situación descrita se reduce al sgte. problema geométrico:



⇝ al igual que en el problema anterior vamos a definir una variable X que no es dato, pero podemos encontrar una expresión para este utilizando trigonometría

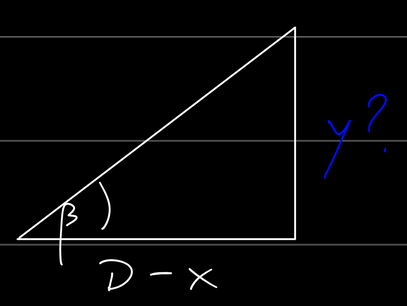
↳ analicemos el triángulo I:



⇝ como desconocemos el valor de la hipotenusa, relacionemos los catetos:

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{h}{x} \rightsquigarrow \boxed{x = \frac{h}{\tan\alpha}}$$

Con esto presente, analicemos el triángulo II:



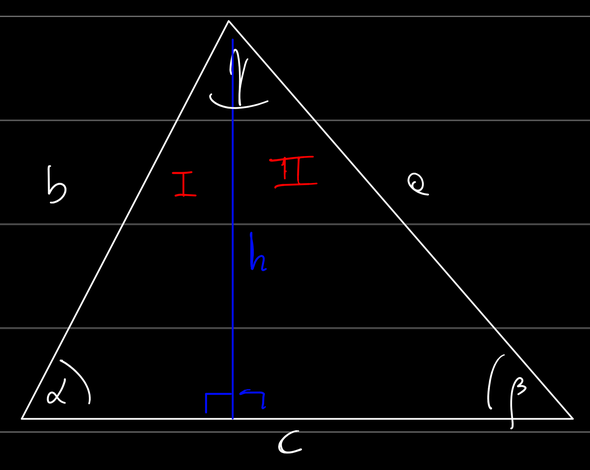
⇝ análogamente: $\tan\beta = \dfrac{y}{D-x}$

así, tendremos que: $y = (D-x)\tan\beta = \left(D - \dfrac{h}{\tan\alpha}\right)\tan\beta$

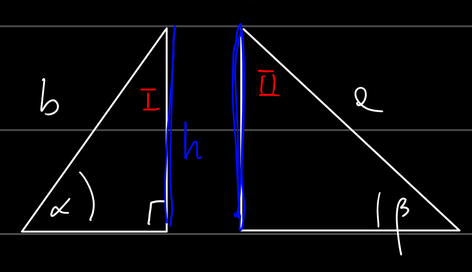
P3| Demostración Teo. Seno / Coseno

↳ Para ello vamos a generar triángulos rectángulos para aplicar relaciones trigonométricas.

↳ Partamos con el Teo. del Seno:



⇝ Al trazar la altura h, se nos forman dos triángulos rectángulos:

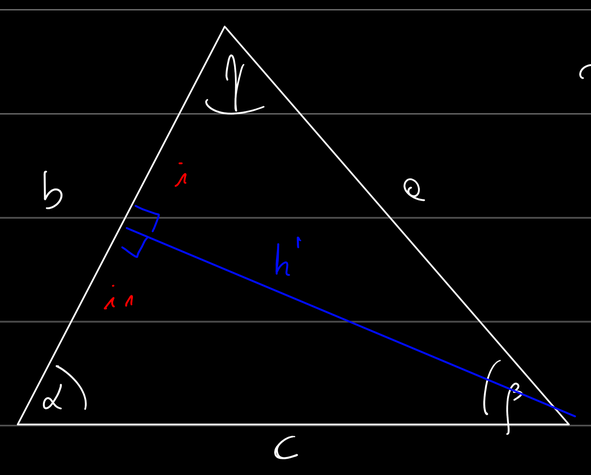


⇝ de I: $\sin\alpha = \frac{h}{b}$; de II: $\sin\beta = \frac{h}{a}$

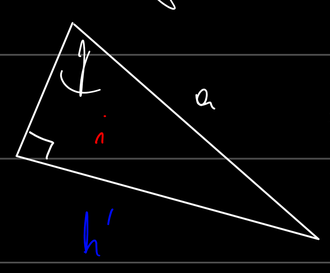
⇝ ahora, como ambos triángulos "comparten" h: $h = b\sin\alpha = a\sin\beta$ ⇒ $\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}}$ (1)

ordenando

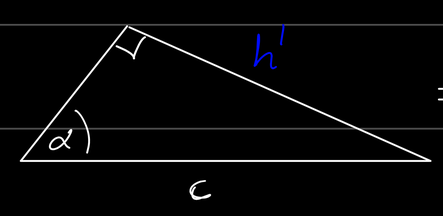
Para completar, nos falta relacionar $\sin\gamma$ ⇝ basta con trazar una altura diferente.



⇝ análogo a la parte anterior:



⇒ $\sin\gamma = \frac{h'}{a}$

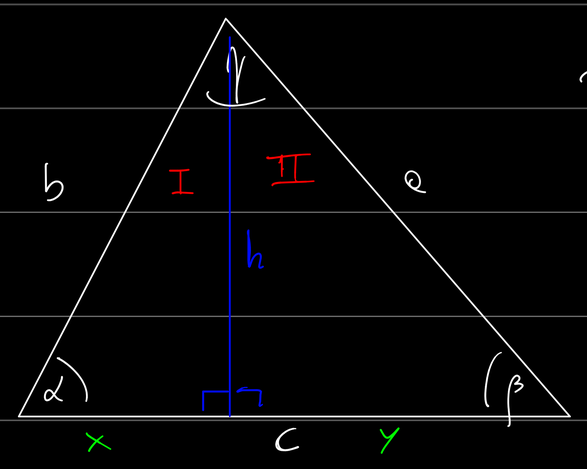


⇒ $\sin\alpha = \frac{h'}{c}$

De ambas expresiones: $h' = a\sin\gamma = c\sin\alpha$ ⇒ $\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}}$ (2)

Finalmente, juntando (1) y (2): $\boxed{\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}$ Teo. del Seno

↳ Ahora para el Teo. del Coseno el procedimiento es muy parecido, pero tendremos que usar el Teo. de Pitágoras



⇝ en este caso notemos que se divide el segmento c: $c = x + y$

⇝ demostremos que se cumple: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Del triángulo II, por Pitágoras tenemos que: $a^2 = h^2 + y^2$ (1)

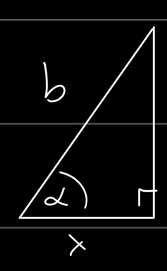
del Triángulo I tenemos que: $x^2 + h^2 = b^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2$

y como $c = x + y \Rightarrow y^2 = c^2 + x^2 - 2cx$

entonces (1) se puede escribir como: $a^2 = \underbrace{(b^2 - x^2)}_{h^2} + \underbrace{(c^2 + x^2 - 2cx)}_{y^2} = b^2 + c^2 - 2cx$!!

estamos cerca

↳ para obtener la expresión deseada notemos del triángulo I:



$\cos\alpha = \dfrac{x}{b} \Rightarrow x = b\cos\alpha$

Reemplazando: $a^2 = b^2 + c^2 - 2c\underbrace{(b\cos\alpha)}_{x}$ $\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$

↳ utilizando la misma figura obtengamos: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

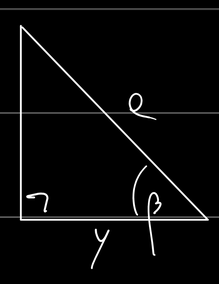
Por Pitágoras del triángulo I: $b^2 = x^2 + h^2$

// del Triángulo II: $y^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - y^2$

como $c = x + y \Rightarrow x^2 = c^2 + y^2 - 2cy$

así: $b^2 = x^2 + h^2 = a^2 + c^2 - 2cy$

↳ Del Triángulo II:



$\cos\beta = \dfrac{y}{a} \Rightarrow y = a\cos\beta$ $\therefore b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

⇝ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ Propuesto!

P4) Propiedades:

a) Recordemos que: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \Rightarrow \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ (1)

por otro lado: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ (2)

Reemplazando (2) en (1): $\cos(2\alpha) = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\therefore \boxed{\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}}$$

b) Recordemos que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (*) y $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$

como queremos. $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$ ⇝ nos pide así e quiere dividir (*) por $\cos^2\alpha$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \;/\cdot 1/\cos^2\alpha \Rightarrow 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \therefore \boxed{1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha}$$

c) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

↳ Definimos $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$ y $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$ ⇝ así: $\alpha = u+v$ y $\beta = u-v$

así: $\sin\alpha + \sin\beta = \sin(u+v) + \sin(u-v)$

↳ Recordando que $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin(u+v) + \sin(u-v)}_{\sin(\alpha)+\sin(\beta)} = (\sin u\cos v + \cos u\sin v) + (\sin u\underbrace{\cos(-v)}_{=\cos v} + \cos u\underbrace{\sin(-v)}_{-\sin v})$$

$$= \sin u\cos v + \cancel{\cos u\sin v} + \sin u\cos v - \cancel{\cos u\sin v}$$

$$= 2\sin u\cos v$$

⇝ como $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$ y $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$: $\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$ ⇝ parte (d) propuesta!