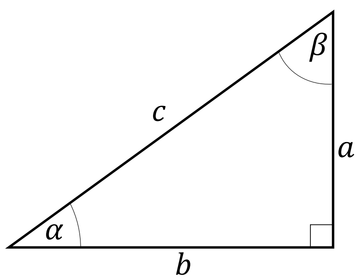
FI1000-6 Introducción a la Física Clásica
Profesora: Paulina Lira
Auxiliares: Juan Cristóbal Castro, Alejandro Silva
Ayudantes: Catalina Molina, Francisca Bórquez

Resumen: Trigonometría

1. Definiciones trigonométricas

Para un triángulo rectángulo se definen las siguientes relaciones entre ángulo y lados:

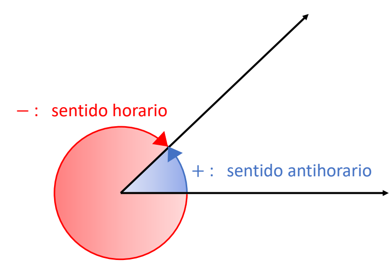


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cat. adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cat. opuesto}}{\text{cat. adyacente}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a}$$

2. Ángulos y Radianes

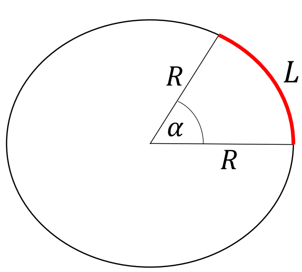


Se denomina ángulo a la sección del plano que queda comprendida entre dos semirrectas que se originan en un mismo punto, y están colocadas en distintas direcciones.
Se define que un ángulo es **positivo** cuando se mide en el sentido **antihorario** (contrario a las agujas del reloj), y por lo tanto es **negativo** si se mide en sentido contrario, es decir, en el sentido **horario** (mismo que las agujas del reloj).

Existen distintos sistemas de medición de ángulos (de manera análoga a la que existen distintos sistemas para medir, por ejemplo, distancias: millas, kilómetros, leguas, etc.). El sistema más conocido es el **sistema sexagesimal** el cual mide los ángulos en **grados, minutos y segundos** ($1° \equiv 60'$ y $1' \equiv 60''$), donde una vuelta a la circunferencia corresponde a $360°$.
De ahora en adelante nos centraremos en el **sistema circular** el cual mide los ángulos en **radianes**, donde una vuelta a la circunferencia corresponde a $2\pi[rad]$ o simplemente 2π.

¿Qué es un radián?

Para definir un radián, primero consideremos una longitud de arco L. Con una simple regla de tres, se tiene que:



$$\begin{aligned} 2\pi[rad] &\longrightarrow 2\pi R \text{ (Perímetro circunferencia)} \\ \alpha &\longrightarrow L \\ \therefore\ L &= \alpha R \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $1[rad]$ se define como el ángulo para el cual la longitud de arco L es igual al radio R de la circunferencia.

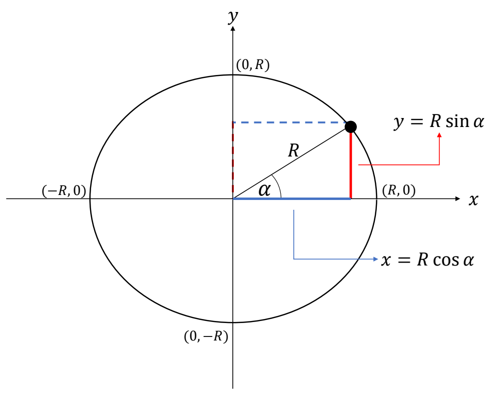
Para pasar de grados a radianes, recuerden que $\pi = 180°$, y realizan una regla de 3:

$\circ$	0	30	45	60	90	180	270	360
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

De esta manera se determina que $1[rad] = 180/\pi \approx 57{,}296°$

3. Trigonometría en una Circunferencia

Consideremos una circunferencia de radio R centrada en el origen y un punto cualquiera de esta. Las funciones trigonométricas nos permitirá determinar la **proyección** del punto en los ejes. Por las definiciones dadas se tiene que:



$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \dfrac{y}{R} \;\Rightarrow\; y = R\sin\alpha \\[2ex] \cos\alpha = \dfrac{x}{R} \;\Rightarrow\; x = R\cos\alpha \end{array}\right.$$

Con esto en mente podemos deducir algunas propiedades muy importantes:

- Por teorema de Pitágoras se tiene que:

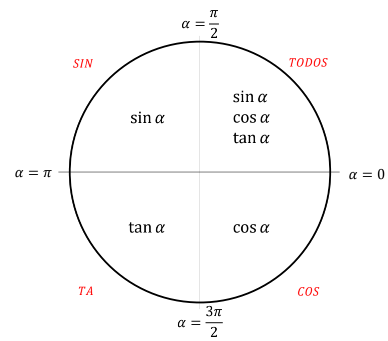
$$(R\sin\alpha)^2 + (R\cos\alpha)^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

- Algunos valores:
  - si $\alpha = 0$:
    - la proyección en x es máxima y vale R, luego $R\cos(0) = R \Rightarrow \cos(0) = 1$
    - la proyección en y es nula, luego $R\sin(0) = 0 \Rightarrow \sin(0) = 0$
  - si $\alpha = \pi/2$:
    - la proyección en x es nula, luego $R\cos(\pi/2) = 0 \Rightarrow \cos(\pi/2) = 0$
    - la proyección en y es máxima y vale R, luego $R\sin(\pi/2) = R \Rightarrow \sin(\pi/2) = 1$
  - si $\alpha = \pi$:
    - la proyección en x es mínima y vale $-R$, luego $R\cos(\pi) = -R \Rightarrow \cos(\pi) = -1$
    - la proyección en y es nula, luego $R\sin(\pi) = 0 \Rightarrow \sin(\pi) = 0$
  - si $\alpha = 3\pi/2$:
    - la proyección en x es nula, luego $R\cos(3\pi/2) = 0 \Rightarrow \cos(3\pi/2) = 0$
    - la proyección en y es mínima y vale $-R$, luego $R\sin(3\pi/2) = -R \Rightarrow \sin(3\pi/2) = -1$
  - si $\alpha = 2\pi$: lo mismo que con $\alpha = 0$, pues dimos la vuelta

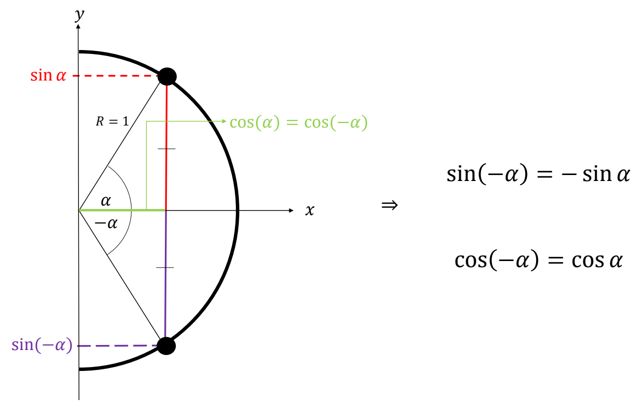
Esto nos quiere decir que $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ y $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ para cualquier valor de α.

- Signos:
  - si $\alpha \in (0, \pi/2)$: $\cos\alpha > 0$ $\sin\alpha > 0$ $\tan\alpha > 0$
  - si $\alpha \in (\pi/2, \pi)$: $\cos\alpha < 0$ $\sin\alpha > 0$ $\tan\alpha < 0$
  - si $\alpha \in (\pi, 3\pi/2)$: $\cos\alpha < 0$ $\sin\alpha < 0$ $\tan\alpha > 0$
  - si $\alpha \in (3\pi/2, 2\pi)$: $\cos\alpha > 0$ $\sin\alpha < 0$ $\tan\alpha < 0$

  Ayudamemoria: las regiones en donde estas funciones son positivas pueden ser recordadas por la frase "Todos sin ta cos"



- Ángulos negativos:
  Es fácil observar que un ángulo negativo genera la misma proyección en el eje x, no así en el eje y, en donde la proyección se vuelve negativa. Es decir:



  Una función que cumpla $f(-x) = f(x)$ (como el coseno) se denomina **función par**, por otro lado, si cumple $f(-x) = -f(x)$ (como el seno) se denomina **función impar**

4. Otras identidades importantes

Las siguientes identidades serán de mucha utilidades y verán sus demostraciones en profundidad en Introducción al Cálculo

- Suma de ángulos:
  - $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$
  - $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
  - La resta es aplicar paridad/imparidad de las funciones
- Teorema del Seno y del Coseno: Para cualquier triángulo se cumplen las siguientes relaciones
  - Teorema del Seno: $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c}$
  - Teorema del Coseno:
    viene a ser una extensión del Teorema de Pitágoras
    - $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
    - $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
    - $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

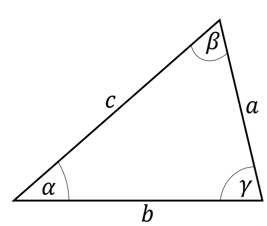


Tabla de valores de ángulos "importantes"

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

- Ayudamemoria: note que para el seno y el coseno la tabla se arma de la siguiente manera
  - para el seno complete con $0, 1, 2, 3, 4$ y para el coseno con $4, 3, 2, 1, 0$
  - tome raíz
  - divida por 2