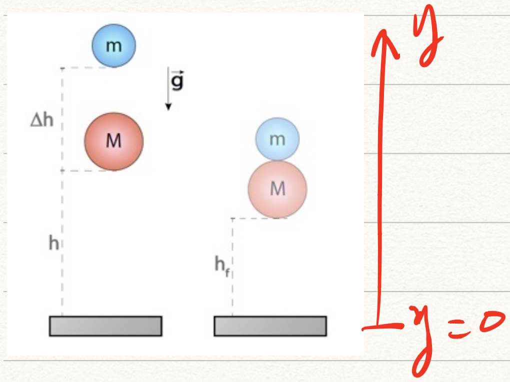
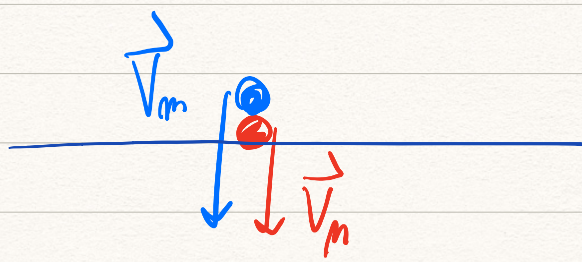
FI1000 - Otoño 2021 - Control 2

Pauta P1



Fijamos la referencia de altura en el suelo.

- Justo antes de llegar al suelo las partículas tienen velocidades $\vec{V}_m$ y $\vec{V}_M$ como en la figura



Sus módulos se pueden calcular con la conservación de la energía mecánica pues la única fuerza involucrada es la gravedad que es conservativa, luego para M

$$E_i = E_f \quad [1.0 \text{ ptos}]$$

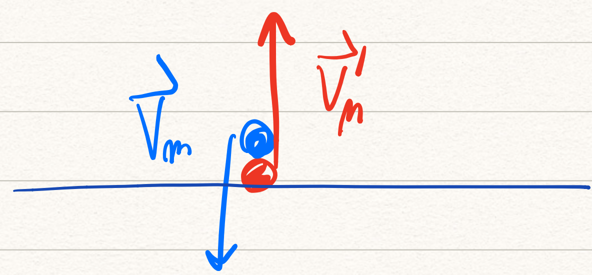
$$Mgh = \frac{1}{2} M V_M^2 + \cancel{Mg0}^{=0}$$

$$\boxed{V_M = \sqrt{2gh}} \quad [0.5 \text{ ptos}]$$

Igualmente

$$\boxed{V_m = \sqrt{2gh}} \quad [0.5 \text{ ptos}]$$

- Después del rebote con el piso la velocidad de M se invierte pero con el mismo módulo y queda:



• Ahora las partículas se juntan a nivel del suelo y suben unidad. Este proceso solo involucra fuerzas internas por lo que se conserva el momentum.

Con y hacia arriba se tiene.

$$M\sqrt{2gh} - m\sqrt{2gh} = (m+M)V$$

[1.0 ptos]

Donde V es la velocidad de la masa compuesta.

$$\boxed{V = \frac{(M-m)}{(M+m)}\sqrt{2gh}}$$

[1.0 ptos]

• Finalmente podemos usar la conservación de la energía mecánica para encontrar h_f.

$$E_i' = E_f'$$

[1.0 ptos]

$$\cancelto{0}{(M+m)\cdot g\cdot 0} + \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{(M+m)}\frac{(M-m)^2}{(M+m)^2}\cancel{2}\cancel{g}h = \ldots$$

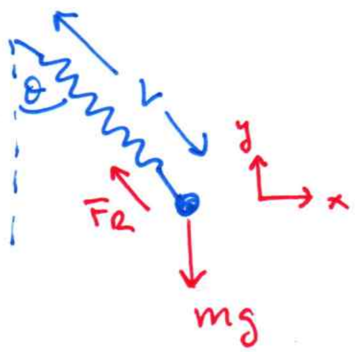
$$\ldots = \cancel{(M+m)}\cdot\cancel{g}\cdot h_f$$

$$\boxed{h_f = \frac{(M-m)^2}{(M+m)^2}h}$$

[1.0 pts]

P2)

DCL m



0.5 puntos

$$L = l_0 + \Delta l$$

$$F_R = k\,\Delta l \quad \text{(Ley de Hooke)}$$

x) $\quad -F_R \operatorname{sen}\theta = -m\,a_c \quad (1) \qquad a_c = \dfrac{v^2}{r}$ = aceleración centrípeta

0.5 puntos

y) $\quad F_R \cos\theta - mg = 0$

entonces $\qquad F_R = \dfrac{mg}{\cos\theta}$ 0.5 puntos

Reemplazando en (1)

$$\frac{mg}{\cos\theta}\cdot \operatorname{sen}\theta = m\,\frac{v^2}{r}$$ 0.5 puntos

pero $\quad v = \omega r \quad$ entonces

$$g \tan\theta = \omega^2 r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{g}{\omega^2}\tan\theta$$ 0.5 puntos

De la geometría del problema

$$\sin\theta = \frac{r}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{r}{\sin\theta}$$ 0.5 puntos

entonces

$$l_0 + \Delta l = \frac{g}{\omega^2 \cos\theta} \qquad (3)$$ 0.5 puntos

pero $\Delta l = \frac{F_R}{k} = \frac{mg}{k\cos\theta}$ **0.5 puntos**

$$\Rightarrow \quad l_0 = \frac{g}{\omega^2\cos\theta} - \Delta l$$

$$l_0 = \frac{g}{\cos\theta}\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{m}{k}\right]$$

Por lo tanto

$$\boxed{\cos\theta = \frac{g}{l_0}\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{m}{k}\right]}$$ **1 punto**

Reemplazando en (3)

$$L = \frac{g}{\omega^2\cos\theta} = \frac{l_0}{\omega^2\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{m}{k}\right]}$$

$$\therefore \quad \boxed{L = \frac{l_0}{1 - \frac{m}{k}\omega^2}}$$ **1 punto**

a) 4.0 p
b) 2.0 p

FI1000 - Otoño 2021 - Control 2
Pauta P3

(a) Para esta situación se tiene fuerzas conservativas y no-conservativas. Usando el teorema del trabajo-Energía cinética tenemos que:

Extremo superior del plano inclinado

base del plano inclinado

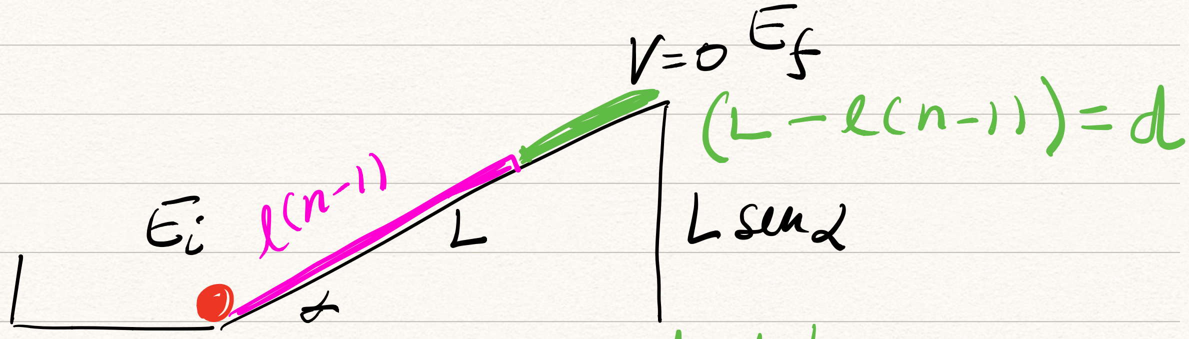
$$E_f = E_i + W_p + W_R \qquad (1)$$

[0.5 ptos]

trabajo de los propulsores $W_p > 0$

trabajo del roce $W_R < 0$

Ponemos la referencia de altura en el suelo y evaluamos cada una de las partes de la ecuación (1)



d = distancia con roce

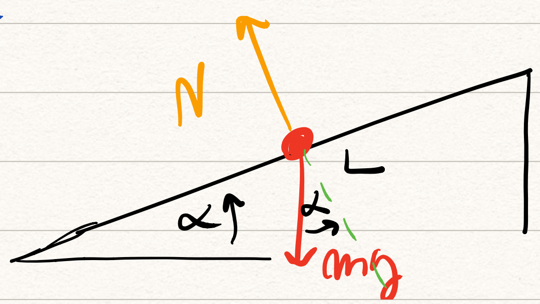
- $\boxed{E_i = \frac{1}{2} k \, \Delta l^2}$ (2) [0.5 ptos]

- $\boxed{E_f = \underbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}\cdot 0^2}_{=0} + mg\,L\operatorname{sen}\alpha}$ (3) [0.5 ptos]

- $\boxed{W_p = n\,\Delta E}$ (4) [0.5 ptos]

- $W_R = -d\,f_r = -(L-(n-1)l)\,f_r$

Necesitamos calcular la fuerza de roce



$$N - mg\cos\alpha = 0$$

$$N = mg\cos\alpha$$

$$y \quad f_r = \mu N$$

$$f_r = \mu m g \cos\alpha$$

Juntando todo se tiene

$$\boxed{W_R = -(L-(n-1)\ell)\mu m g \cos\alpha} \quad (5)$$

[1.0 ptos]

Con (2), (3), (4) y (5) en (1)

$$\boxed{mgL\,\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 + n\Delta E - (L-(n-1)\ell)\mu m g \cos\alpha}$$

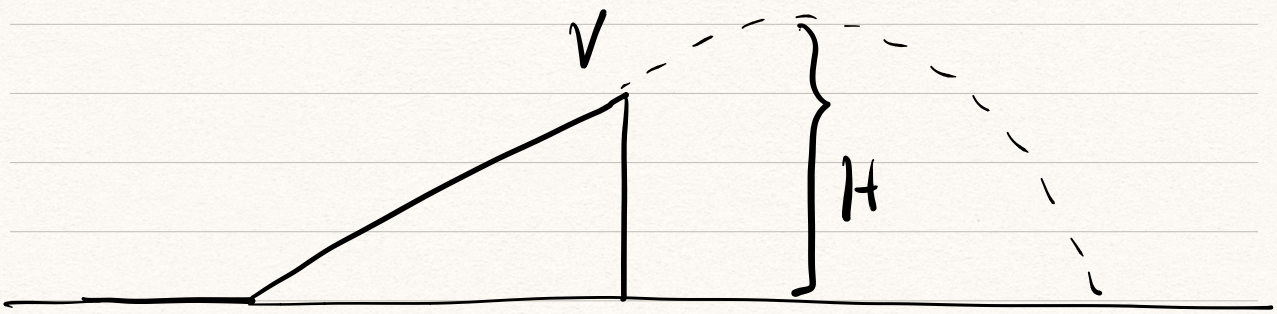
[0.5 ptos]

Ahora despejamos ℓ

$$\boxed{\ell = \frac{mgL\,\text{sen}\,\alpha - \frac{1}{2}k\Delta\ell^2 - n\Delta E + L\mu m g \cos\alpha}{(n-1)\mu m g \cos\alpha}}$$

[0.5 ptos]

(b) Ahora queremos que los propulsores entreguen una $\Delta E'$ tal que tengamos energía cinética necesaria para subir una altura H.



Definimos $\boxed{\Delta E' = \Delta E + \delta E}$ (6)

donde ΔE es la energía del caso (a) justa para llegar al extremo inferior con $v=0$ y δE el adicional de cada propulsor.

En esta nueva situación (1) se cumple pero le agregamos algunos términos:

$$\boxed{E_f + \frac{1}{2} m v^2 = E_i + W_p + n \cdot \delta E + W_R}$$

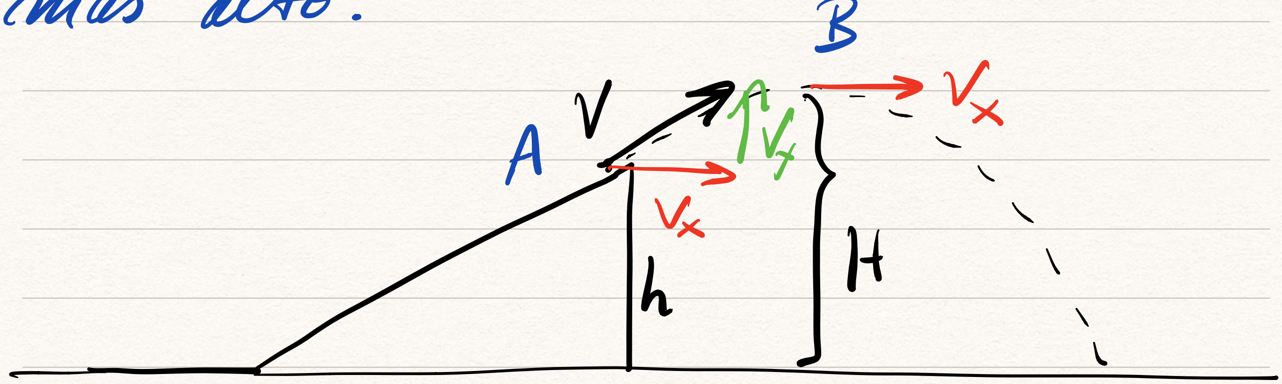
[0.5 ptos] (7)

Los términos en verde se cancelan por (1), luego

$$\boxed{\delta E = \frac{1}{2} \frac{m}{n} v^2} \quad (8)$$

Solo falta encontrar v para que la masa llegue a A.

Como solo actúa la gravedad se conserva la energía mecánica entre el extremo y el punto más alto.



$V_y = 0$ en punto más alto.

$$E_A = E_B$$

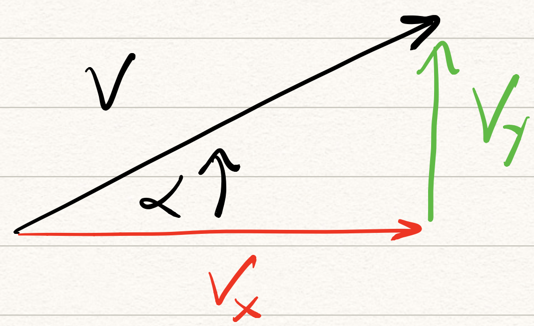
$$\cancel{\frac{1}{2}m(V_x^2} + V_y^2) + mgh = \cancel{\frac{1}{2}mV_x^2} + mgH$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}V_y^2 = \cancel{m}g(H-h)$$

$$\boxed{V_y = \sqrt{2g(H-h)}} \quad (9)$$

[0.5 ptos]

Ahora relacionamos V con V_x



$$V_y = V \operatorname{sen}\alpha \iff \boxed{V = \frac{V_y}{\operatorname{sen}\alpha}} \quad (10)$$

Con (9) y (10) en (8) [0.5 ptos]

$$\delta E = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{m}{n} \frac{\cancel{2} g (H-h)}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\boxed{\delta E = \frac{m g (H-h)}{n \operatorname{sen}^2 \alpha}} \qquad (11)$$

finalmente con (11) en (6)

$$\boxed{\Delta E' = \Delta E + \frac{m g (H-h)}{n \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

[0.5 ptos]

<u>Nota</u>: En la parte (b) puede haber otros caminos, en particular para expresar $\Delta E'$, hay que considerar con cuidado estas posibilidades.