Pauta aux 4:-

Desde el punto **A** se lanza una pelota de manera que alcance el punto **P** ubicado sobre el plano superior del abismo que aparece en la figura, donde se incluyen los datos del problema.

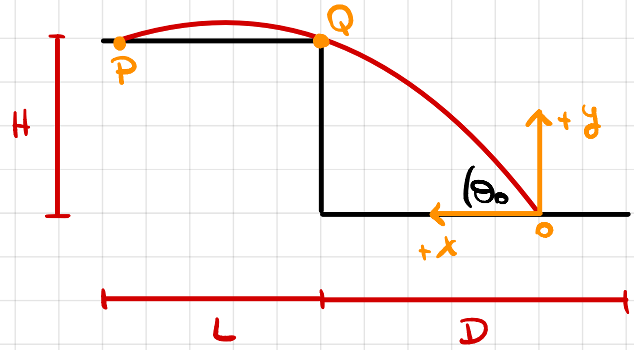
a.- (4 ptos.) Encuentre la rapidez V_o que debe tener la pelota en el punto de lanzamiento y el ángulo θ_o que ésta forma con la horizontal para que alcance el punto **P** y que pase rozando por el vértice **Q** del abismo.

b.- (2 ptos.) Encuentre el valor mínimo de la rapidez inicial V_o para que la pelota alcance apenas el borde del abismo (**Q**).

P1)

(1) Plantear sistema de referencia

H, D, L son datos



nota:
este es uno de los S.R. que pueden usar, si usan otro muy probablemente sus cálculos no serán los mismos, además la matraca también la pueden hacer como quieran, lo importante es resolver el sist. de ecuaciones.

(2) Ecuaciones:

• recordamos que por superposición podemos separar los ejes

en el eje x tenemos:

(1) $x(t) = x = v_{ox} \cdot t \Rightarrow t = x/v_{ox}$

(2) $y(t) = y = v_{oy} \cdot t - g t^2/2$

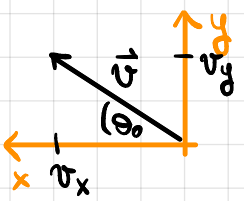
notación solamente :>

estas ecuaciones surgen de aplicar las condiciones iniciales a la ecuación

$x(t) = x_o \pm v_o t \pm a t^2/2$

para (1) y (2) $x_o = 0$ por el sistema de referencia

En un problema de cinemática 2D en general podemos descomponer el vector velocidad:

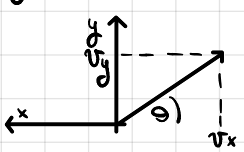


$\Rightarrow \cos\theta_o = \dfrac{v_x}{v} \quad \wedge \quad \operatorname{sen}\theta_o = \dfrac{v_y}{v}$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

(3) $v_x = v\cos\theta_o$ $\wedge$ (4) $v_y = v \operatorname{sen}\theta_o$

un buen ejercicio es ver que pasa en otro caso, ejemplo:



$\Rightarrow v_x = -v\cos\theta$

$v_y = v \operatorname{sen}\theta$

(1) y (3) en (2)

$$y = \tan\theta_0 \cdot x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v^2\cos\theta_0^2}$$

③ Evaluamos en P y Q

(5) en Q $\rightarrow$ $y(x=D) = H \Rightarrow H = \tan\theta_0 \cdot D - \frac{g D^2}{\underbrace{2v_0^2\cos^2\theta_0}_{}}$

denotaremos esto = a para no escribir tanto :)

(6) en P $\rightarrow$ $y(x=D+L) = H \Rightarrow H = \tan\theta_0 \cdot (D+L) - \frac{g(D+L)^2}{2v_0^2\cos\theta_0^2}$

recordemos que cuando arriba reemplazamos $t = x / v_{0x}$ en (2) lo que hicimos fue pasar de $y(t)$ a $y(x)$

$y(t)$ $\downarrow$ ecuación dependiente del tiempo

$y(x)$ $\downarrow$ ecuación dependiente de la posición

por lo que solo necesitamos información de posiciones (que es justo lo que nos entrega el enunciado)

④ Matraca

(5) − (6)

$$0 = -\tan\theta_0 \cdot L - \frac{gD^2}{a} + \frac{g(D+L)^2}{a}$$

reordenamos

$$\tan\theta_0 \cdot L = g\frac{(L^2 + 2DL)}{\underbrace{2v_0^2\cos^2\theta_0}_{a}}$$

$\Downarrow$ reordenamos y simplificamos L

$$\cos^2\theta_0 \cdot \underbrace{\tan\theta_0}_{\frac{\operatorname{sen}\theta_0}{\cos\theta_0}} = g\frac{(L+2D)}{2v_0}$$

$\Downarrow$ pasa el 2 mult.

$$2\operatorname{sen}\theta_0 \cdot \cos\theta_0 = g\frac{(L+2D)}{v_0^2} \Rightarrow$$

(*)

$$\boxed{v_0^2 = \frac{g(L+2D)}{2\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0}}$$

el valor de v_0 lo reemplazamos en (5)

$$H = \tan\theta_0 \cdot D - \frac{g D^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta_0}$$

$$= \tan\theta_0 \cdot D - \frac{\cancel{g} D^2}{\frac{\cancel{2g}(L+2D)\cos^{\cancel{2}}\theta_0}{\frac{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\theta_0 \cancel{\cos\theta_0}}{1}}}$$

$$= \tan\theta_0 \cdot D - \frac{D^2}{(L+2D)\,\mathrm{cotg}\,\theta_0}$$

$$\frac{1}{\mathrm{cotg}\,\theta} = \tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad H = \tan\theta_0 \cdot D - \tan\theta_0 \frac{D^2}{(L+2D)}$$

↓ factorizamos por $\tan\theta_0$ y restamos la fracción

$$= \tan\theta_0 \left(\frac{D(L+2D) - D^2}{L+2D} \right)$$

$$\left(\frac{DL + 2D^2 - D^2}{L+2D} \right)$$

$$= \tan\theta_0 \left(\frac{DL + D^2}{L+2D} \right)$$

⇓ despejamos $\tan\theta_0$

(★)

$$\boxed{\tan\theta_0 = \frac{H(L+2D)}{D(L+D)}}$$

→ si le aplican arctan a eso ya tienen el valor del ∡

(★) en (∗)

aquí intentamos hacer aparecer una tangente, para poder ocupar el valor de $\tan\theta_0$

$$v_0^2 = \frac{g(L+2D)}{2\,\text{sen}\theta_0\cos\theta_0}\cdot\frac{\frac{1}{\cos\theta_0}}{\frac{1}{\cos\theta_0}}$$

$$= \frac{g(L+2D)\frac{1}{\cos\theta_0}}{2\tan\theta_0\cdot\cos\theta_0} = g\frac{(L+2D)}{2\tan\theta_0\cdot\cos\theta_0^2}$$

$$\cos^2 = \frac{1}{\sec^2} = \frac{1}{1+tg^2}$$

$$= g\frac{(L+2D)}{2\tan\theta_0\cdot\left(\frac{1}{1+\tan\theta_0^2}\right)} = g\frac{(L+2D)(1+tg^2\theta_0)}{2tg\theta_0}$$

↓

ahora podemos reemplazar

$$v_0^2 = \frac{g(\cancel{L+2D})\left(1+\left(\frac{H(L+2D)}{D(L+D)}\right)^2\right)}{2\left(\frac{H\,(\cancel{L+2D})}{D(L+D)}\right)}$$

$$\boxed{v_0^2 = \frac{gD(L+D)\left(1+\left(\frac{H(L+2D)}{D(L+D)}\right)^2\right)}{2H}}$$

→ valor de la velocidad

Para la b) solo deben reemplazar $L=D$ en las expresiones para v_0 y $tg\theta_0$

P2.- (MCU)

Un anillo muy pequeño se logra hacer girar con velocidad angular constante a lo largo de una circunferencia vertical de radio R. La circunferencia está cortada en un punto determinado por un ángulo $\theta = 30^o$, como se señala en la Figura 1. Al alcanzar este punto, el anillo se desprende y continúa en caída libre.

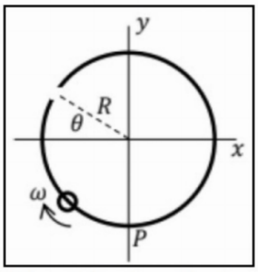
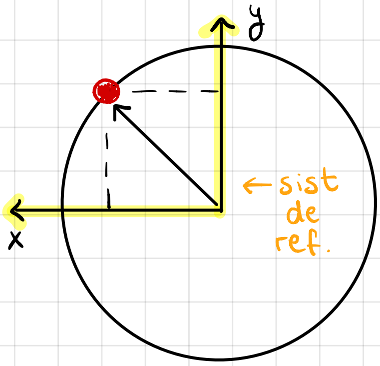


Figura 1: Trayectoria del anillo.

a) **(1.5 pto)** Calcule el valor de la velocidad angular ω si el anillo, luego de desprenderse, toca a la circunferencia precisamente en su punto más bajo P

b) **(1.5 pto)** Para el caso anterior indique la velocidad y la rapidez del anillo cuando cruza el diámetro de la circunferencia (eje x)

P2) a) 1ro escribimos las ecuaciones de movimiento



tomamos t_0 cuando el aro sale expulsado de la ⊙

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \cancel{a}t^2/2$$

$$= -R\cos\theta + \omega R \operatorname{sen}\theta \, t$$

analogamente:

$$y(t) = R\operatorname{sen}\theta + \omega R\cos\theta \cdot t - gt^2/2$$

según el sist de ref.

recuerdo: en este caso la posición y velocidad del aro son:

$\vec{r}$ será la notación que usaré para explicar esto, es solo un nombre :)

$$\vec{r}(t) = (-R\cos\theta \, , \, R\operatorname{sen}\theta)$$ ← escrito como par ordenado

$$= -R\cos\theta \, \hat{x} + R\operatorname{sen}\theta \, \hat{y}$$ ← escrito con vectores unitarios

$$\vec{v}(t) = (\omega R\operatorname{sen}\theta \, , \, \omega R\cos\theta)$$

$$= \omega R\operatorname{sen}\theta \, \hat{x} + \omega R\cos\theta \, \hat{y}$$

si no entienden pq $\vec{r}(t)$ y $v(t)$ tienen estos valores, recomiendo revisar el apunte del profe o pedir una explicación en un h. de consultas, tambien pueden preguntar por el foro o por mail :)

ahora usamos los datos en las ecuaciones, en particular tenemos información sobre el instante en el que el aro pasa por P , a este instante lo llamaremos t^*

reemplazamos los datos

tomemos en cuenta que $P = (0, -R)$ en el S.R.

$$\Rightarrow \quad x(t^*) = 0 = -R\cos\theta + \omega R \,\mathrm{sen}\theta \cdot t^* \quad \Rightarrow \quad t^* = \frac{\cos\theta}{\omega\,\mathrm{sen}\theta} \qquad (1)$$

$$(2) \quad y(t^*) = -R = R\,\mathrm{sen}\theta + \omega R\cos\theta \cdot t^* - g\,t^{*2}/2$$

desarrollamos (1) en (2)

$$\frac{\cos}{\mathrm{sen}} = \mathrm{cotg}$$

$$-R = R\,\mathrm{sen}\theta + \cancel{\omega} R\cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\cancel{\omega}\,\mathrm{sen}\theta} - \frac{g}{2}\left(\frac{\cos\theta}{\omega\,\mathrm{sen}\theta}\right)^2$$

Despejamos ω

$$\rightarrow \quad R + R\,\mathrm{sen}\theta + R\,\mathrm{cotg}\theta \cdot \cos\theta = \frac{g\,\mathrm{cotg}^2}{2\omega^2}$$

↓ factorizamos

$$\rightarrow \quad R + R\,\mathrm{sen}\theta\left(1 + \mathrm{cotg}\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\theta}\right) = \frac{g\,\mathrm{cotg}^2}{2\omega^2}$$

$$\rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g\,\mathrm{cotg}^2\theta}{2R\left(\mathrm{sen}\,\underbrace{(1+\mathrm{cotg}^2\theta)}_{\mathrm{cosec}^2 = \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}} + 1\right)} = \frac{g\,\mathrm{cotg}^2\theta}{2R\left(\cancel{\mathrm{sen}\theta} \cdot \frac{1}{\mathrm{sen}^{\cancel{2}}\theta} + 1\right)}$$

$$= \frac{g\,\mathrm{cotg}^2\theta}{2R\,\underbrace{\left(1/\mathrm{sen} + 1\right)}_{\frac{1}{\mathrm{sen}}(1 + \mathrm{sen})}} = \frac{g\,\mathrm{cotg}^2\theta \cdot \mathrm{sen}\theta}{2R(1+\mathrm{sen}\theta)} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$$

evaluando en el ∡ del enunciado

b) queremos calcular la velocidad en módulo y dirección, primero veamos el módulo:

↳ ya que piden rápidez

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$ → debemos calcular v_x^2 y v_y^2

calculamos v_y: usamos la siguiente ec. itinerario

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a(x_f - x_i)$$

en $\hat{y}$) $v_y^2 - v_{oy}^2 = -2g(0 - R\,\text{sen}\,\theta)$

↳ $\omega R \cos\theta = v_{oy}$

Despejamos v_{oy}

$$\Rightarrow v_y^2 = \omega^2 R^2 \cos^2\theta + 2gR\,\text{sen}\,\theta$$

reemplazamos ω, $\cos\theta$ y $\text{sen}\,\theta$

$$\left(\sqrt{\frac{g}{2R}}\right)^2 R^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2gR\,\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow v_y^2 = \frac{g}{2\cancel{R}} R^{\cancel{2}} \cdot \frac{3}{4} + gR = \frac{3gR}{8} + gR = \frac{11}{8} gR$$ //

Luego calculamos v_x

v_x se mantiene cte en todo el movimiento, ya que no hay aceleración en el eje x

$$\Rightarrow v_x^2 = v_{ox}^2 = (\omega R\,\text{sen}\,\theta)^2$$

$$= \left(\sqrt{\frac{g}{2R}}\right)^2 R^2 \text{sen}\,\theta^2$$

reemplazamos $\text{sen}\,\theta$

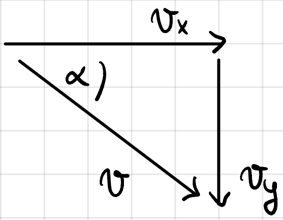
$$= \frac{g}{2\cancel{R}} R^{\cancel{2}} \frac{1}{4} = \frac{gR}{8}$$ //

ahora reemplazamos en la expresión para v

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{gR/8 + 11gR/8} = \sqrt{\frac{3Rg}{2}}$$ //

modulo pq preguntan rapidez

Para saber la dirección debemos saber el ∡ con el que llega al diametro



$$\tan\theta = v_y / v_x$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \arctan(v_y / v_x)$$