16 - 10 - 2020

Estudiemos la siguiente matriz

Mauricio Muñoz R.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Comenzamos calculando los valores propios

$$\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 5 \\ -1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = 3$$

Para cada valor propio se calculan los vectores propios

$$\lambda = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Con esto notamos

$$\left.\begin{array}{r} a + b - 2c = 0 \\ -b + 3c = 0 \end{array}\right\} \quad b = 3c$$

$$a + b - 2c = 0$$

$$a + 3c - 2c = 0$$

$$a + c = 0 \longrightarrow a = -c$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -3a \\ -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

primer valor propio: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

*** NOTA:** valor propio $\lambda = 2$ tiene:

multiplicidad algebraica : 2

multiplicidad geométrica : 1

↳ sólo genera un vector propio

$\lambda = 3$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + 3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Con esto notamos

$$\left.\begin{array}{l} b - 2c = 0 \\ -a - c = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} b = 2c \\ c = -a \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ 2c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

valor propio $\lambda = 3$

multiplicidad algebraica 1

multiplicidad geométrica 1

hasta aquí todo es muy estandar

Continuemos $\longrightarrow$

Notar que en nuestro espacio vectorial $E_1 = (A - \lambda I)$ tenemos la siguiente base de vectores l.i

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

esta base está incompleta ... ya que hemos trabajado con un espacio de dimensión 3.

¿Cómo completar la base? vamos a mirar el siguiente espacio vectorial E_2

$$E_2 = \ker(A - \lambda I)^2$$

¿y para qué λ?

debemos ir con $\lambda = 2$ pues no coinciden las multiplicidades

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora su ker

$$E_2 = \ker(A - 2I)^2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 + 2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow 2a + b - c = 0$$

$$\rightarrow c = 2a + b$$

$$\therefore \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nuestro valor propio $\lambda = 2$ consiguió generar 2 vectores l.i.

pero no pueden pertener ambos a la base de E_1

¿Cómo elegir ahora? debemos tomar uno de estos que sea l.i con la base de E_1 y luego buscar su imagen en E_1

Al parecer ambos sirven; así que escogeré $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ el cual pertenece a $E_2 = \ker (A - 2I)^2$

la idea se puede resumir Así:

$$\text{desde} \quad E_1 \xrightarrow{\text{generar}} E_2$$

$\downarrow$ encontrar uno o más vectores que completen la base

$$f(u) \longleftarrow u$$

ver la imagen de u en E_1

- $f(u) = \ker(A - 2I)\,u$

$$f(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así la base en E_1 será:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\lambda = 3}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{f(u) \\ \lambda = 2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{u \\ \lambda = 2}} \right\}$$

El orden si importa; siempre va primero la imagen y luego el vector u

¿Qué sigue? Ver la forma de Jordan

Primero escribimos la matriz de paso con la base $\mathcal{B}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz de Jordan, la cual tiene una forma estandar (ya lo detallaré) y sigue el orden de la matriz de paso

$$J = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lambda = 3 & f(u) & u \end{array} \end{array}$$

destacado: se encuentra cada bloque de Jordan.

Finalmente

$$\boxed{A = P J P^{-1}}$$

Por completitud detallo P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

detalle de Jordan: la premisa de este método es diagonalizar por bloques

La matriz siempre será de la forma (J):

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1\end{matrix}} & 0 & 0 & \\ 0 & \boxed{\lambda_2} & 0 & \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix}\lambda_3 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3\end{matrix}} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

matriz llena de 0's salvo bloques diagonales

En diagonal principal va los valores propios por bloques

diagonal secundaria superior se llena con 1's en cada bloque (premisa de Jordan)

¿Qué ganamos con todo esto?

Nosotros queremos resolver $\dot{X} = AX$

$\rightarrow \quad \dot{X} = PJP^{-1}X \quad / \; P^{-1}\cdot(\;)$

$\rightarrow \quad P^{-1}\dot{X} = JP^{-1}X \quad /$ sea $y = P^{-1}X$

$\quad \hookrightarrow \dot{y} = P^{-1}\dot{X}$

$\rightarrow \quad \dot{y} = J y$ Este sistema de EDO's es mucho más fácil de resolver

Observemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

*** Notar:** las EDO's para y_1 e y_3 han quedado desacoplados ... lo cual es más fácil que resolver

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

donde todo está acoplado