EJEMPLO DE APLICACIÓN DE LA TEORIA DE GRADO DE LERAY-SCHAUDER

CONSIDERAMOS: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, ACOTADO, ABIERTO CONEXO.

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{EN } \Omega \\ u = 0 & \text{EN } \partial\Omega \end{cases}$$

EXISTEN VARIOS MÉTODOS DE RESOLVER (1).

EL MÉTODO BASADO EN LA TEORIA DE GRADO CONSISTE DE 2 PASOS:

(I) ELEGIR UN ESPACIO DE BANACH $X \ni u$ Y CONVERTIR (1) EN $u = T(u)$ DONDE $T: X \to X$ COMPACTO

(II) USAR LA INVARIANCIA DE GRADO BAJO HOMOTOPIAS. POR EJEMPLO CONSIDERAR

$$h(\lambda, u) = u - \lambda T(u)$$

$$\lambda \in [0,1]$$

Y DEMOSTRAR QUE h ES ADMISIBLE $B_R(0) = \{u \mid \|u\| < R\}$

EN OTRAS PALABRAS DEMOSTRAR QUE

$$\exists_{R>0} \ \forall_{\|u\|=R} \quad u \neq \lambda T(u), \ \lambda \in [0,1]$$

OBSERVAMOS:

$$\deg(u - \lambda Tu, B_R, 0) =$$

$$= \deg(u, B_R, 0)$$

$$= 1$$

$\Rightarrow$ EXISTENCIA.

<u>TEOREMA</u>

SUPONIENDO $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ES LOCALMENTE CLASE HÖLDER CONTINUA Y

$$\lim_{|u| \to \infty} \frac{f(x,u)}{|u|} = 0$$

UNIFORMEMENTE EN Ω, ENTONCES EXISTE UNA SOLUCIÓN DE (1).

<u>DEMOSTRACIÓN</u>

[RECORDAR LA CLASE AUXILIAR DONDE HABLAMOS DE OPERADOR DE NEMITSKI, DE ESPACIOS DE SOBOLEV

ETC.)

AFIRMACIÓN

$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{C_\varepsilon} > 0$ TAL QUE :

$$|f(x,u)| \leq C_\varepsilon + \varepsilon|u|$$

FACIL USANDO LA HIPOTESIS:

LA EXISTENCIA DE LIMITE $\Rightarrow$

$$\forall_\varepsilon \quad \exists_{M_\varepsilon} \quad |u| > M_\varepsilon \Rightarrow |f(x,u)| < \varepsilon|u|$$

$$C_\varepsilon = \sup_{\substack{|u| \leq M_\varepsilon \\ x \in \Omega}} |f(x,u)|$$

$$\Rightarrow \quad |f(x,u)| \leq C_\varepsilon + \varepsilon|u|$$

DADO ESTO Y f LOCALMENTE HÖLDER

$$\Rightarrow \quad u \longmapsto f(x,u)$$

ES UN OPERADOR DE NEMITSKI EN $L^2(\Omega) = X$

CONVERTIR (1) EN $u = T(u)$

RECORDAMOS K OPERADOR DE GREEN DE $-\Delta$ EN $H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta\phi = h & \text{EN } \Omega \\ \phi = 0 & \text{EN } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi = Kh$$

$$K : L^2(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

ES COMPACTO (ESPACIOS DE SOBOLEV)

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) \\ u = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow u = Kf(x,u)$$
$$(u = u(x))$$

DEFINIMOS $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$

$$Tu = Kf(x,u)$$

EJERCICIO: T ES COMPACTO.

SI $\|u\| = R \Rightarrow u \neq \lambda T(u)$

BASTA DEMOSTRAR:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u) & \text{EN } \Omega \\ u = 0 & \text{EN } \partial\Omega \end{cases}$$

ENTONCES EXISTE UN R TAL QUE

$\|u\|_{L^2} < R.$

(LA COTA A PRIORI)

SI $-\Delta u = \lambda f(x,u) \Rightarrow$

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot u = \lambda \int_\Omega f(x,u) \cdot u$$

$$\leq \int_\Omega |f(x,u)||u|$$

$$\leq \int_\Omega (C_\varepsilon + \varepsilon |u|)|u|$$

$$= C_\varepsilon \int_\Omega |u| + \varepsilon \int_\Omega |u|^2$$

$$\leq C_\varepsilon \left(\int_\Omega |u|^{1/2}\right)^{1/2} |\Omega|^{1/2} + \varepsilon \int_\Omega |u|^2$$

$$= C_\varepsilon |\Omega|^{1/2} \|u\|_{L^2} + \varepsilon \|u\|_{L^2}^2$$

$$\int_\Omega -\Delta u \cdot u = \int_\Omega |\nabla u|^2$$

(POINCARÉ) $\geq \lambda_1 \int_\Omega |u|^2 = \lambda_1 \|u\|^2_{L^2}$

DONDE λ_1 ES EL VALOR PROPIO PRINCIPAL DE:

$$\begin{cases} -\Delta \phi = \lambda \phi & \text{EN } \Omega \\ \phi = 0 & \text{EN } \partial\Omega \end{cases}$$

$\lambda_1 > 0$

$$\lambda_1 \|u\|^2_{L^2} \leq C_\varepsilon |\Omega|^{1/2} \|u\|_{L^2} + \varepsilon \|u\|^2_{L^2}$$

$$(\lambda_1 - \varepsilon) \|u\|^2_{L^2} \leq C_\varepsilon |\Omega|^{1/2} \|u\|_{L^2}$$

$$(\lambda_1 - \varepsilon) \|u\|_{L^2} \leq C_\varepsilon |\Omega|^{1/2}$$

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{C_\varepsilon |\Omega|^{1/2}}{\lambda_1 - \varepsilon}$$

EN PARTICULAR SI $R = 2 \dfrac{C_\varepsilon |\Omega|^{1/2}}{\lambda_1 - \varepsilon}$

$\Rightarrow \quad u \neq \lambda T(u)$ SI $\|u\|_{L^2} = R$