GRADO TOPOLÓGICO DE BROUWER

RECORDAMOS:

$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$

$p \in \mathbb{R}^n$, $p \notin f(\partial\Omega)$

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \text{sign}\, J_f$$

DONDE

$$J_f = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \quad \text{(MATRIZ JACOBIANA)}$$

HEMOS VISTO QUE EL CONCEPTO DE GRADO SE EXTIENDE EN CASO QUE

(1) $J_f(x) = 0$, $x \in f^{-1}(p)$

(2) f ES CONTINUA

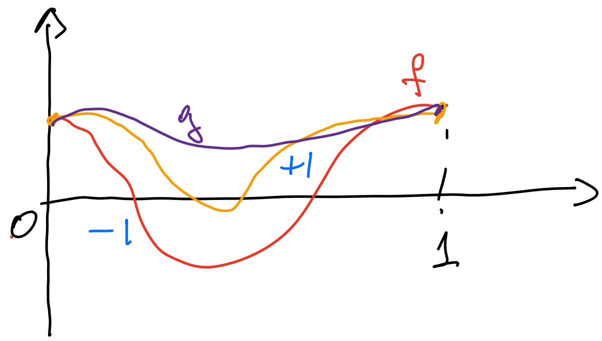
TOMANDO LIMITES UNIFORMES.

PROPIEDAD CLAVE:

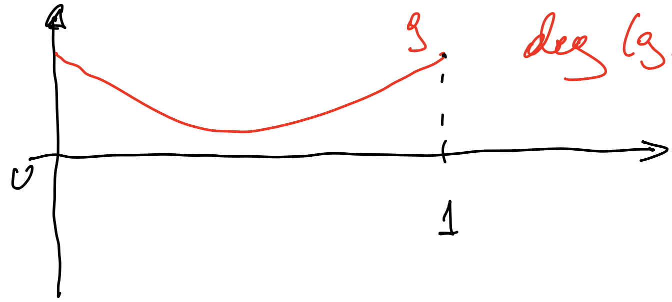
$$\deg(f, \Omega, p) \neq 0 \Rightarrow \exists_{z \in \Omega}\ f(z) = p$$

EN APLICACIONES $p = 0$

$$f(x) = 0$$



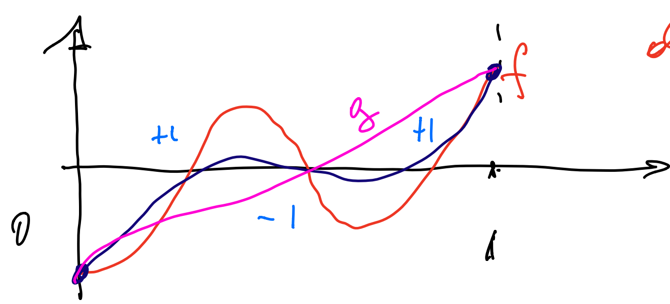
$\deg(f,(0,1),0) =$
$-1+1=0$



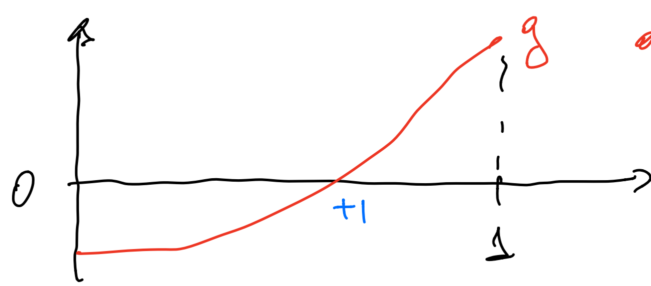
$\deg(g,(0,1),0)=0$

$$h(x,t) = t f(x) + (1-t) g(x)$$

$$\deg(h,(0,1),0) = 0, \quad \forall t \in [0,1]$$



$\deg(f,(0,1),0)=1$



$\deg(g,(0,1),0)=1$

$$h(t,x) = t f(x) + (1-t) g(x)$$

$\deg(h, (0,1), 0) = 1$, $\forall_{t \in [0,1]}$

$\Rightarrow$ $h(t, x) = 0$
TIENE AL MENOS UNA
SOLUCIÓN PARA $\forall_{t \in [0,1]}$.

APLICACIÓN:

(1) g DADA, $g(x) = 0$ TIENE UNA
SOLUCIÓN, $\deg(g, \Omega, 0) \neq 0$

(2) f UNA DEFORMACIÓN CONTINUA
DE g, $g(x) = f(x)$, $x \in \partial\Omega$

$\Rightarrow$ $f(x) = 0$ TIENE UNA SOLUCIÓN

DEFINICIÓN

UNA TRANSFORMACIÓN $h \in C([0,1] \times \bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$
SE LLAMA UNA HOMOTOPIA.

DECIMOS QUE $h(t, x)$ ES ADMISIBLE
RESPECTO A Ω Y $p \in \mathbb{R}^n$ SI
$h(t, x) \neq p$, $\forall_{t \in [0,1]}$, $x \in \partial\Omega$

$(p \notin h(t, \partial\Omega)$, $t \in [0,1])$

TEOREMA

SI h ES UNA HOMOTOPIA ADMISIBLE RESPECTO A Ω Y $p \in \mathbb{R}^n$ ENTONCES

$$\deg(h(t,\cdot),\Omega,p) \text{ NO DEPENDE DE}$$

$t \in [0,1]$.

EN PARTICULAR:

$$\deg(h(0,\cdot),\Omega,p) = \deg(h(1,\cdot),\Omega,p)$$

COROLARIO

SEAN $f,g \in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ TALES QUE

$f(x) = g(x)$, $x \in \partial\Omega$, $p \notin f(\partial\Omega)$
$= g(\partial\Omega)$

ENTONCES:

$$\deg(f,\Omega,p) = \deg(g,\Omega,p)$$

DEMOSTRACION:

$$h(t,x) = t f(x) + (1-t) g(x)$$

USAR EL TEOREMA ANTERIOR PARA $h(t,x)$.

TEOREMA

(i) SI $f_k \to f$ UNIFORMEMENTE

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \deg(f_k, \Omega, p) = \deg(f, \Omega, p)$$

(ii) $\deg(f, \Omega, p)$ ES UNA FUNCIÓN CONTINUA DE p.

(iii) (EXTIRPACIÓN) SEA $\Omega_0 \subseteq \Omega$ ABIERTO, $f(x) \neq p$, $\forall x \in \Omega \setminus \Omega_0$

$$\Rightarrow \deg(f, \Omega_0, p) = \deg(f, \Omega, p)$$

<u>SOLUCIONES AISLADAS DE $f(x) = p$</u>

$p = f(x_0)$, $x_0 \in \Omega$, $\exists r > 0$

$f(x) \neq p$, $\forall x \in B_r(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow$ USANDO (iii)

$$\deg(f, B_r(x_0), p) = \deg(f, B_\rho(x_0), p)$$

$\forall \rho$ $r > \rho$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0} \deg(f, B_\rho(x_0), p) = i(f, x_0)$$

$i(f, x_0)$ index DE f EN x_0

Si $f^{-1}(p) = \{x_1 \dots x_k\}$, $x_j \in \Omega$

$$\deg(f, \Omega, p) = \sum_{j=1}^{k} i(f, x_j)$$

LEMMA

SEA $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n) \cap C^0(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ $x_0 \in \Omega$ TAL QUE $f(x_0) = p$ ES UN VALOR REGULAR. ENTONCES

$$i(f, x_0) = (-1)^{\beta}$$

DONDE β ES LA SOMA CONTANDO MULTIPLICIDADES) DE VALORES PROPIOS NEGATIVOS DE $Df(x_0)$

DEMOSTRACIÓN

SEA $r > 0$ TAL QUE:

$$\deg(f, B_r(x_0), p) = i(f, x_0)$$

$$\shortparallel$$

$$\operatorname{sign}(J_f(x_0))$$

USANDO LA FORMA NORMAL DE JORDAN PARA $Df(x_0)$ TENEMOS

$J_f(x_0) = \det Df(x_0) = \lambda_1 \dots \lambda_n$

$\{\lambda_j\}$ SON LOS VALORES PROPIOS

OBSERVACIÓN

(i) $\lambda_j \neq 0$, P ES VALOR REGULAR

(ii) $\lambda_j \in \mathbb{C} \Rightarrow \bar{\lambda}_j$ ES UN VALOR PROPIO Y CON LA MISMA MULTIPLICIDAD

$\Rightarrow \lambda_j \cdot \overline{\lambda_j} = |\lambda_j|^2 > 0$

$\Rightarrow \operatorname{sign}[J_f(x_0)] = (-1)^\beta$

$\beta = \#\{\lambda_j < 0\}$

APLICACIÓN: TEOREMA DE BROWER

DENOTAREMOS $B = B_1(0) = \{|x| < 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$

TEOREMA

NO EXISTE $f: B \to \partial B$ CONTINUA Y TAL QUE $f = I$ EN ∂B

DEMOSTRACIÓN

POR CONTRADICCIÓN: SUPONGAMOS QUE EXISTE TAL f.

TENEMOS $\deg(I, B, 0) = 1$

USANDO LA INVARIANCIA RESPECTO
A LA HOMOTOPIA

$$\deg(I, B, 0) = \deg(f, B, 0)$$
$f = I$ EN ∂B

$\Longrightarrow \deg(f, B, 0) = 1$

$\Rightarrow \exists\, x \in B, \ f(x) = 0$

CONTRADICCIÓN $f(B) = \partial B$

EJEMPLO: $B = \{x^2 + y^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$f : B \to \mathbb{R}^2$ ES UN CAMPO
VECTORIAL EN B

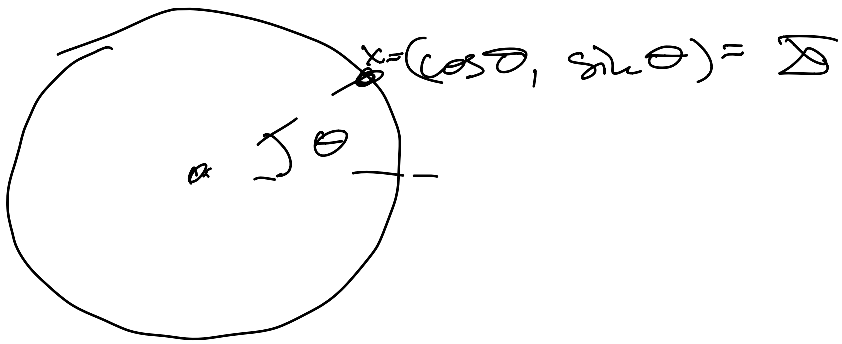
NO EXISTE UN CAMPO VECTORIAL
$X : B \to \mathbb{R}^2$ TAL QUE

$|X| = 1$ EN B,

$X = I$ EN ∂B

EJEMPLO DE X: $X(x) = e^{i \operatorname{Arg}(x)}$
PARA $x \in \partial B$

$\Sigma(x) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha = \operatorname{Arg} x$



ESTE Σ NO TIENE UNA EXTENSIÓN CONTINUA TAL QUE $|\Sigma| = 1$

EN CAMBIO SI Σ ES UNA EXTENSIÓN CONTINUA $\Longrightarrow$

$$\exists\, x_0 ,\ \Sigma(x_0) = 0$$

TEOREMA DE BROUWER

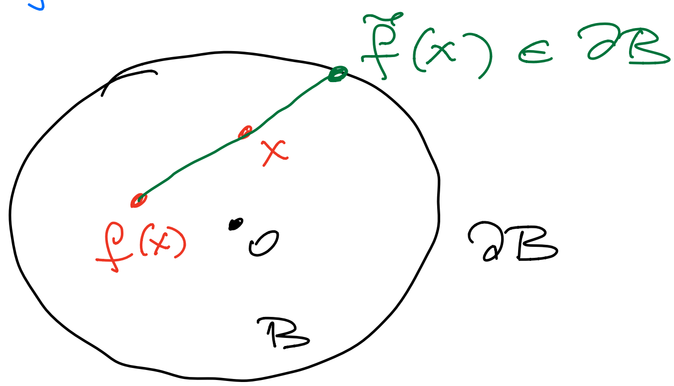
SEA $f : \overline{B} \to \overline{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ CONTINUA. ENTONCES f TIENE AL MENOS UN PUNTO FIJO.

$$\exists\, x_0 \in \overline{B},\quad f(x_0) = x_0 .$$

DEMOSTRACIÓN

SI $f(x) \neq x$, $\forall x \in \overline{B}$ ENTONCES PODEMOS DEFINIR

$\tilde{f} : B \longrightarrow \partial B$



(i) $\tilde{f}$ ES CONTINUA

(ii) $\tilde{f} = I$ EN ∂B

$\Longrightarrow$ CONTRADICCIÓN CON EL TEOREMA ANTERIOR

EJERCICIO: GENERALIZACIÓN DE TEOREMA DE BROUWER PARA C CONVEXO, CERRADO.