ECUACIONES ELIPTICAS

$$\begin{cases} -\Delta u = h & \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \text{TRAZA } D^2$$

SI $h \in L^2(\Omega)$ LA SOLUCIÓN DÉBIL $u \in H_0^1(\Omega)$ SE DEFINE COMO

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega h v \,, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

SI $u \in L^2 \Rightarrow \Delta u \in L^2(\Omega)$

NO ES LO MISMO QUE $D^2 u \in L^2(\Omega)$

CALDERÓN - ZYGMUND PERMITE DEDUCIR QUE $D^2 u \in L^2(\Omega)$:

DESIGUALDAD DE CALDERÓN - ZYGMUND

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

$$u \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow u \in H^{2,2}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

TEOREMA

(i) SI $h \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ ENTONCES $\exists!$ $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{2,p}(\Omega)$ SOLUCIÓN DÉBIL Y TAL QUE

$$\|u\|_{H^{2,p}} \leq C \|h\|_{L^p}$$

$$C = C(n, \Omega, p)$$

(ii) (COTAS DE SCHAUDER)

SI $\partial\Omega$ ES CLASE $C^{2,\alpha}$, $h \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ ENTONCES $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ ES UNA SOLUCIÓN CLÁSICA. ADEMÁS:

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C \|h\|_{C^{0,\alpha}}$$

$$\begin{cases} -\Delta u = h & , h \in L^2(\Omega) \\ u = 0 \end{cases}$$

LA PARTE (i) DEL TEOREMA DEFINE

$$h \longmapsto u = K(h)$$

K EL OPERADOR DE GREEN DE $-\Delta$ EN $H_0^1(\Omega)$

EJERCICIO (6)

DEMOSTRAR QUE K ES COMPACTO COMO TRANSFORMACIÓN DE L^2 EN L^2.

(TEO. DE SOBOLEV)

EJERCICIO 7

CONSIDERANDO $K: C^{0,\alpha} \longrightarrow C^{0,\alpha}$

DEMOSTRAR QUE K ES COMPACTO.

(TEO. ARZELA-ASCOLI)

GENERALIZACIÓN:

$$Lu = h \quad \text{en } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{en } \partial\Omega$$

DONDE

$$L = -\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} + \sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)u$$

(i) $a_{ij}, b_i, c \in C^1(\overline{\Omega})$

(ii) $c \leq 0$ EN $\overline{\Omega}$

(iii) $\exists\ \mu > 0$

$$\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2, \ \forall_{\xi \in \mathbb{R}^n}$$

(ELIPTICIDAD UNIFORME)

VALORES PROPIOS DE PROBLEMA DE DIRICHLET.

$$(*)\quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{EN } \Omega \\ u = 0 & \text{EN } \partial\Omega \end{cases}$$

USANDO EL OPERADOR K:

$$(*) \iff u = \lambda K(u) \iff u - \lambda K(u) = 0$$

VALORES PROPIOS DE $(*)$ SON VALORES CARACTERISTICOS DE K

SEA $A : X \to X$, X ESPACIO DE BANACH DE LA FORMA:

$$A = I - C, \quad C \text{ COMPACTO.}$$

(1) $\dim \operatorname{Ker}(A) < \infty$, $\operatorname{Ran}(A)$ ES CERRADO Y $\operatorname{Codim} \operatorname{Ran}(A)$
$= \dim \operatorname{coker}(A) < \infty$

(2) $\operatorname{Ran}(A) = [\operatorname{Ker}(A^*)]^{\perp}$

$$= \{u \in X \mid \langle \psi, u \rangle = 0, \ \forall \psi \in \operatorname{Ker}(A^*)\}$$

(3) $\exists_{m \geq 1}$ TAL QUE:

$$\operatorname{Ker}(A^k) = \operatorname{ker}(A^{k+1}), \quad k \geq m$$

$$X = \operatorname{Ker}(A^m) \oplus \operatorname{Ran}(A^m)$$

$A|_{\operatorname{Ran}(A^m)}$ ES UN ISOMORFISMO

(4) $\operatorname{Ker} A = 0 \iff \operatorname{Ran} A = X$

<u>DEFINICIÓN:</u>

DECIMOS QUE $\rho \in \mathbb{C}$ ES UN ELEMENTO DE LA RESOLVENTA DE A SI

$A_\rho = \rho I - C$ ES INVERTIBLE

($\rho(C)$ RESOLVENTA)

SI $\lambda \notin \rho(C) \Rightarrow \lambda \in \sigma(C)$

(ESPECTRO DE C)

SI $\operatorname{Ker}(\lambda I - C) = \operatorname{Ker}(A_\lambda) \neq \phi$

DECIMOS QUE λ ES UN VALOR PROPIO DE C.

EL ENTERO m DE PARTE (3)

TAL QUE $\operatorname{Ker}(A_\lambda^k) = \operatorname{Ker}(A_\lambda^{k+1}), \ k \geq m$

SE LLAMA LA MULTIPLICIDAD DE DE λ.

SI $m = 1 \Rightarrow \lambda$ ES UN VALOR PROPIO SIMPLE.

TEOREMA DE RIESZ

$C : X \to X$ COMPACTO

(i) $\sigma(C)$ CONSISTE DE NUMERO FINITO O ENUMERABLE DE COMPLEJOS $\{\lambda_n\}$ CUYO PUNTO LIMITE ES 0.

SI $\dim X = \infty \Rightarrow 0 \in \sigma(C)$

(ii) TODO VALOR PROPIO $\lambda_n \neq 0$ ES DE MULTIPLICIDAD FINITA

(iii) LA RESOLVENTA

$\mathbb{C} \ni \zeta \longmapsto (\zeta I - C)^{-1}$

TIENE UN POLO EN $\lambda_n \neq 0$.

CASO ESPECIFICO

$$(*) \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{EN } \Omega \\ u = 0 & \text{EN } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad u - \lambda K(u) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mu u - K(u) = 0$$

$$\mu = \lambda^{-1}$$

TEOREMA

(i) LA ECUACIÓN $(*)$ TIENE UNA SUCESIÓN

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \quad , \lambda_k \nearrow \infty$$

DE VALORES PROPIOS

(ii) EL PRIMER VALOR PROPIO $\lambda_1 > 0$ ES SIMPLE Y LA FUNCIÓN PROPIA φ_1 ES DE SIGNO CONSTANTE

$$\varphi_1(x) > 0, \quad x \in \Omega$$

ADEMÁS $\displaystyle\int \varphi_k \varphi_j = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$

$$\|\varphi_k\|_{L^2} = 1$$

(iii)

$$\lambda_1 = \min_{\substack{\|u\|_{L^2} = 1 \\ u \in H^1_0}} \|\nabla u\|^2_{L^2}$$

EJERCICIO 8: DEDUCIR

$$\forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \|u\|_{L^2}^2 \leq \lambda_1 \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

(iv)

$$W_k = \{ u \in H_0^1(\Omega) \mid \int \nabla u \cdot \nabla \varphi_j = 0 , \ j = 1, \dots, k-1 \}$$

$$\lambda_k = \min \{ \|\nabla u\|_{L^2} \mid u \in W_k , \ \|u\|_{L^2} = 1 \}$$

CONSIDERAMOS:

$$(**) \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + h , & x \in \Omega \\ u = 0 & \text{EN } \partial\Omega \end{cases}$$

TEOREMA

(i) SI $\lambda \neq \lambda_k , \ \forall k \geq 1 \implies$

(**) TIENE UNA ÚNICA SOLUCIÓN (DÉBIL)

(ii) SEA λ_k VALOR PROPIO,

V_k ES NÚCLEO DE $-\Delta u = \lambda u , \ \lambda = \lambda_k$

ENTONCES (**) TIENE UNA

ÚNICA SOLUCIÓN SI

$$\int_\Omega h \cdot v = 0 \quad , \quad \forall v \in Y_1$$

$$\begin{cases} -\Delta u = h & , \Omega \\ u = 0 & , \partial\Omega \end{cases}$$

$\forall h \quad \exists! \quad u$ SOLUCIÓN DÉBIL

$$h \longmapsto u = K(h)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

$$u = K(\lambda u) = \lambda K(u)$$