MA4006-2 Combinatoria
Profesora: Maya Stein
Auxiliares: Javier Marinkovic y Martín Gilabert

Guía de ejercicios complementarios #1

Ejercicio 1. Definimos los números de Fubini (o los números ordenados de Bell) $T(n)$ como el número de particiones ordenadas de $[n]$, es decir el número de tuplas $(T_1, \dots, T_k)$ tales que $1 \leq k \leq n$ y $\{T_i\}_{i=1}^k$ es partición de $[n]$.

a) Verifique que $T(n) = \sum_{k=0}^n k!S(n,k)$ y que para cada $n \geq 1$ tenemos

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T(n-k) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} T(k)$$

con valor de borde $T(0) = 1$.

b) Muestre que $T(n)$ es el número de relaciones de preorden totales en $[n]$ (un preorden es una relación refleja, transitiva y total).

Ejercicio 2. Sean $k, n \in \mathbb{N}$. Cuente el número de k-tuplas $(X_1, \dots, X_k)$ de $[n]$ sujetos a las siguientes condiciones por separado (es decir, los problemas son independientes):

a) $X_1 \cap \cdots \cap X_k = \emptyset$.

b) $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_k$.

c) los X_i son disjuntos de a pares.

d) $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k = [n]$.

Ejercicio 3. Recordemos que $r|s$ significa que r divide a s. Una cadena de divisores de n es una secuencia $a_0|a_1|\cdots|a_k$ donde $a_0 = 1$ y $a_n = n$. Por ejemplo, 30 tiene 13 cadenas de divisores:

1|3|6|30	1|2|10|30	1|3|6|30	1|3|15|30	1|5|10|30	1|5|15|30	
1|2|30	1|3|30	1|5|30	1|6|30	1|10|30	1|15|30	1|30.

Sea n el producto de m primos distintos. Encuentre el número de cadenas de divisores de n.

Ejercicio 4. Sea $n \in \mathbb{N}$.

a) Encuentre el número de maneras de elegir una composición α de n, y de después escoger una composición de cada parte de α. Entregue una prueba combinatorial. Ojo: no identificamos maneras de hacer este procedimiento si las composiciones “finales” de n son la misma.

b) Si $1 \leq k < n$, muestre que entre las 2^{n-1} composiciones de n, la parte de tamaño k aparece $(n-k+3)2^{n-k-2}$. Por ejemplo, si $n = 4$ y $k = 2$, entonces la parte 2 aparece una vez en $2+1+1$, $1+2+1$, $1+1+2$, y dos veces en $2+2$ para un total de 5 partes.

Ejercicio 5. Sean A un alfabeto finito, $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $w \in A^p$. Decimos que v es una rotación de w si existen palabras s, t tales que $w = st$ y $v = ts$, y llamamos $\mathrm{Rot}(w)$ al conjunto de las rotaciones de w. Por ejemplo, $\mathrm{Rot}(ababcd) = \{ababcd, babcda, abcdab, cdabab, dababc\}$ y $\mathrm{Rot}(ababab) = \{ababab, bababa\}$.

a) Muestre que para cada $w \in A^p$, $|\mathrm{Rot}(w)|$ divide a p y pruebe que $|\mathrm{Rot}(w)| = 1$ ssi todos los símbolos de w son iguales.

b) Concluya por multiconteo el pequeño teorema de Fermat: para todo p primo y $a \in \mathbb{N}$, $a^p \equiv a$ mód p.

Indicación: considere el conjunto de palabras de A^p que no tienen todos sus símbolos iguales.

Ejercicio 6. Diremos (de manera general y un poco vaga) que el q-análogo de un objeto matemático es otro objeto que depende de la variable q y que se "reduce" al objeto original al tomar $q = 1$. Una propiedad deseable que pedimos que tengan los q-análogos es que si el objeto original se refiere a conjuntos finitos, entonces su q-análogo se pueda interpretar en términos de subespacios de espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo finito $\mathbb{F}^q$ cuando q es la potencia de un primo.

a) Definimos el polinomio $(\boldsymbol{n}) = 1 + q + q^2 + \cdots q^{n-1} = (1 - q^n)/(1 - q)$ como el q-análogo de $n \in \mathbb{N}$, y el polinomio $(\boldsymbol{n})! = (\mathbf{1})(\mathbf{2}) \cdots (\boldsymbol{n})$ como el q-análogo de $n!$. Muestre que $n!$ cuenta el número de secuencias estrictamente crecientes

$$\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_n = [n]$$

de subconjuntos de $[n]$.

Muestre cuando q es la potencia de un primo,$(\boldsymbol{n})!$ cuenta el número de secuencias estrictamente crecientes

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{F}_q^n$$

de subespacios del espacio vectorial n-dimensional $\mathbb{F}_q^n$ sobre $\mathbb{F}_q$.

b) Sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una composición débil de $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_m}} = \frac{(\boldsymbol{n})!}{(\boldsymbol{a_1})! \cdots (\boldsymbol{a_m})!}$$

el q-análogo del coeficiente multinomial $\binom{n}{a_1,\ldots,a_m}$ y $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k,n-k}}$. Muestre que

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a_1, a_2, \ldots, a_k}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a_1}}\binom{\boldsymbol{n - a_1}}{\boldsymbol{a_2}}\binom{\boldsymbol{n - a_1 - a_2}}{\boldsymbol{a_3}} \cdots \binom{\boldsymbol{a_m}}{\boldsymbol{a_m}}$$

y

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{k}} + q^{n-k}\binom{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{k-1}}$$

para $n \geq k$ (con valores de borde $\binom{\boldsymbol{n}}{0} = 1$). Concluya que $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{a_1,\ldots,a_m}}$ es un polinomio en q con coeficientes enteros nonegativos. ¿Puede encontrar su grado?

Por el resto de este ejercicio, q será la potencia de un primo.

c) Muestre que $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ es el número de subespacios vectoriales de dimensión k de $\mathbb{F}_q^n$.

Indicación: cuente de dos maneras las formas de elegir una tupla $(v_1, \ldots, v_k)$ de vectores linealmente independientes en $\mathbb{F}_q^n$. La demostración es análoga a prueba de la igualdad $\binom{n}{k} = n^{\underline{k}}/k!$.

d) Sea $GL(n, q)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales invertibles de $\mathbb{F}_q^n$ en sí mismo. Consideramos a $GL(n, q)$ como el q-análogo de S_n. Muestre que

$$|GL(n, q)| = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1}) = q^{\binom{n}{2}}(q - 1)^n(\boldsymbol{n})!.$$

Ejercicio 7.

a) Sean x e y variables que satisfacen la relación de conmutación $yx = qxy$, donde q es una variable que conmuta con x e y. Muestre que

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} x^k y^{n-k}.$$

b) Generalice lo anterior a $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ donde $x_i x_j = q x_j x_i$ para $i < j$ y q conmuta con cada x_i.

c) Generalice nuevamente lo anterior a $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$, donde $x_i x_j = q_j x_j x_i$ para $i < j$ y, y donde las variables q_j conmutan con todos los x_i y entre sí.

Ejercicio 8. Definamos el análogo de composiciones débiles para conjuntos: una k-partición ordenada débil de $[n]$ es una tupla $(A_1, \ldots, A_k)$ de subconjuntos de $[n]$ tales que $A_i \cap A_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$ y $\cup_{j=1}^{k} A_j = [n]$. En otras palabras, es una partición en la que permitimos partes vacías.
Encuentre el número de k-particiones débiles de $[n]$.

Ejercicio 9. Definimos los números de Fibonacci por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ si $n \geq 3$. Exprese las siguientes cantidades en función de estos números, mostrando que satisfacen una recurrencia similar o dando una prueba combinatorial.

a) El número de subconjuntos de $[n]$ que no contienen enteros consecutivos.

b) El número de composiciones de n en partes más grandes que 1.

c) El número de composiciones de n en partes de tamaño 1 o 2.

d) El número de composiciones de n en partes impares.

e) El número de secuencias $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de ceros y unos tales que $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \leq \varepsilon_4 \geq \cdots$.

f) $\sum a_1 a_2 \cdots a_k$ donde la suma es sobre todas las 2^{n-1} composiciones $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$.
Indicación: use la parte c).

Ejercicio 10. Fijemos $n, j, k \in \mathbb{N}$. ¿Cuántas secuencias de enteros $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$ existen tales que $a_{i+1} - a_i \geq j$ para cada $1 \leq i \leq k-1$?

Ejercicio 11. Sea $n, k \in \mathbb{N}$.

a) Encuentre una expresión para el número de k-tuplas $(T_1, T_2, \ldots, T_k)$ de subconjuntos de $[n]$ tales que
$$T_1 \subseteq T_2 \supseteq T_3 \subseteq T_4 \supseteq \cdots$$
en función de los números de Fibonacci.

b) Muestre combinatorialmente que
$$F_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n-j}{j}.$$

Ejercicio 12. Definimos los números de Lucas L_n por $L_0 = L_1 = 1$, $L_2 = 3$ y $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ para $n \geq 3$.

a) Muestre que L_n el número de subconjuntos de n puntos distintos en un círculo que no contienen a dos puntos consecutivos. Esto muestra que L_n es un “ánalogo circular” de F_{n+2} (¿por qué?).

b) Muestre que el número de maneras de elegir un subconjunto S de $[n]$ y una permutación $\pi \in S_n$ tal que $\pi(i) \notin S$ para cada $i \in S$ es $F_{n+1} n!$.
Indicación: elija primero un $S \in \binom{[n]}{k}$ y mire dónde puede caer $\pi(i)$ para $i \in S$.

c) Muestre que si en la parte anterior pedimos que π sea un n-ciclo, entonces el número de maneras de elegir S y π es $L_n(n-1)!$.