MA3802-1 Teoría de la Medida
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliares: Benjamín Barrientos, Felipe Flores Ll. y Arie Wortsman.
Fecha: 10 de Diciembre del 2020

Auxiliar 11

P1. Dada una medida con signo μ en $(X, \mathcal{F})$, pruebe que se tienen las siguientes fórmulas para $\mu_+, \mu_-, |\mu|$:

$$\mu_+(A) = \sup_{B \subset A, B \text{ medible}} \mu(B)$$

$$\mu_-(A) = -\inf_{B \subset A, B \text{ medible}} \mu(B)$$

$$|\mu|(A) = \sup_{(A_i) \in PF(A)} \sum |\mu(A_i)|$$

con $PF(A) = \{(A_i)_{i=1}^n \mid (A_i) \text{ son disjuntos y } \bigcup_{i=1}^n A_i \subset A\}$

P2. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible. Defina

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}) = \{\mu \mid \mu \text{ es una medida con signo finita sobre } (X, \mathcal{F})\}.$$

Además, defina

$$\|\mu\| = \|\mu\|_{\mathcal{M}(X,\mathcal{F})} = |\mu|(X).$$

Con $|\mu|$ la variación de μ.

a) **(Propuesto)** Pruebe que $(\mathcal{M}(X, \mathcal{F}), \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado. (De hecho, resulta ser un Banach)

b) Muestre que si $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F})$ son medidas de probabilidad, entonces

$$\|\mu - \nu\| = 2 \sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

Pruebe también que

$$\|\mu - \nu\| = \sup\{\int f d\mu - \int f d\nu \mid \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

c) Si ν es absolutamente continua con respecto a μ, pruebe que

$$\|\mu - \nu\| = 2 \int \left(1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right)_+ d\mu.$$

P3. Sean μ, ν medidas con signo finitas sobre $(X, \mathcal{F})$.

a) Pruebe que μ y ν son singulares entre sí $\Leftrightarrow$ $|\mu|$ y $|\nu|$ son singulares entre sí.

b) Pruebe que, si se cumple lo anterior,

$$\|\mu - \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|.$$

c) Suponga que X tiene al menos el cardinal del continuo. Muestre que $(\mathcal{M}(X, \mathcal{F}), \|\cdot\|)$ no puede ser separable.