

P11

- μ_+ y μ_- son medidas.

Veamos que $\mu = \mu_+ - \mu_-$: Para A, B medibles tales que $A \supseteq B$, se tiene $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$ y si $\mu(A \setminus B) < \infty$:
 $\mu(B) = \mu(A) - \mu(A \setminus B) \leq \mu(A) + \mu_-(A)^{(*)}$, si $\mu(A \setminus B) = \infty$, entonces $\mu(A) = \infty$ y trivialmente se cumple $(*)$.

Tomando supremo sobre los $B \subseteq A$,

$$\mu_+(A) \leq \mu(A) + \mu_-(A).$$

Por otro lado,

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) \leq \mu(B) + \mu_+(A)$$

Tomando ínfimo sobre $B \subseteq A$:

$$\mu(A) \leq -\mu_-(A) + \mu_+(A)$$

$$\Rightarrow \mu = \mu_+ - \mu_-$$

y por teorema de descomposición de Hahn-Jordan:

μ_+ es la parte positiva de μ y μ_- la parte negativa.

Por otra parte Sea P la parte positiva del espacio y N la negativa.

$$|\mu(A)| \geq |\mu(A \cap P)| + |\mu(A \cap N)| = \mu_+(A) - \mu_-(A).$$

$$\Rightarrow |\mu| \geq \mu_+ - \mu_-.$$

Para la otra desigualdad, sea $(A_i) \in PF(A)$.

Tomamos $I_+ = \{i \in I \mid \mu(A_i) \geq 0\}$, $I_- = I \setminus I_+$.

$$\begin{aligned} \text{luego } \sum_{i \in I} |\mu(A_i)| &= \sum_{i \in I_+} \mu(A_i) - \sum_{i \in I_-} \mu(A_i) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i \in I_+} A_i\right) - \mu\left(\bigcup_{i \in I_-} A_i\right) \end{aligned}$$

$$\text{llamando } A_+ = \bigcup_{i \in I_+} A_i, \quad A_- = \bigcup_{i \in I_-} A_i,$$

$$\sum_{i \in I} |\mu(A_i)| \leq \mu_+(A_+) + \mu_-(A_-) \leq \mu_+(A) + \mu_-(A). \quad \square$$

P2]

b) Sea A medible y $X = P \llcorner N$ la descomposición de Hahn.

$$\mu(A) - \gamma(A) \leq \mu(A \cap P) - \gamma(A \cap P) \leq \mu(P) - \gamma(P)$$

~~$$\mu(A) - \gamma(A) \leq \mu(P) - \gamma(P)$$~~

$$\underbrace{(\mu - \gamma)(N)} \leq (\mu - \gamma)(N \cap A) \leq (\mu - \gamma)(A)$$

$$\mu(N) - \gamma(N)$$

"

$$(1 - \mu(P)) - (1 - \gamma(P))$$

"

$$\gamma(P) - \mu(P)$$

$$\Rightarrow |\mu(A) - \gamma(A)| \leq \mu(P) - \gamma(P). \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

y la igualdad se logra cuando $A = P$ o $A = N = P^\complement$.

Así,

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A) - \gamma(A)| = \frac{1}{2} ((\mu(P) - \gamma(P)) + (\mu(N) - \gamma(N)))$$

~~$$= \mu(P) - \gamma(P)$$~~

$$= \frac{1}{2} ((\mu - \gamma)_+(X) + (\mu - \gamma)_-(X))$$

=

c) Defina-se $E = \left\{ \frac{d\nu}{d\mu} \leq 1 \right\}.$

$$\sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A) - \nu(A)| \geq |\mu(E) - \nu(E)|.$$

Para $\int \left(1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right)_+ d\mu = \int_E \left(1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu = \mu(E) - \nu(E) \geq 0$

$$\Rightarrow \sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A) - \nu(A)| \geq \int_E \left(1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu = \int \left(1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right)_+ d\mu.$$

Por outra parte, para $A \in \mathcal{F}$,

$$|\mu(A) - \nu(A)| = \left| \int_A \left(1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu \right|$$

$$= \left| \int_{A \cap E} \left(1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu + \int_{A \cap E^c} \left(1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right) d\mu \right|$$

$$= \left| \int_{A \cap E} \left|1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu - \int_{A \cap E^c} \left|1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu \right|$$

$$\leq \max \left\{ \int_{A \cap E} \left|1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu, \int_{A \cap E^c} \left|1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu \right\}.$$

$$\leq \max \left\{ \int_E \left|1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu, \int_{E^c} \left|1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right| d\mu \right\}.$$

Vemos que $\int_E \left| 1 - \frac{dr}{d\mu} \right| d\mu = \int_{E^c} \left| 1 - \frac{dr}{d\mu} \right| d\mu.$

En efecto:

$$\begin{aligned} \int_E \left| 1 - \frac{dr}{d\mu} \right| d\mu &= \int_E 1 - \frac{dr}{d\mu} d\mu = \mu(E) - r(E) \\ &= (1 - r(E)) - (1 - \mu(E)) \\ &= - \int_{E^c} 1 - \frac{dr}{d\mu} d\mu \\ &= \int_{E^c} \left| 1 - \frac{dr}{d\mu} \right| d\mu \end{aligned}$$

con lo cual $\sup_{A \in \mathcal{F}} |\mu(A) - r(A)| \leq \int_E \left| 1 - \frac{dr}{d\mu} \right| d\mu$

$$= \int (1 - \frac{dr}{d\mu})_+ d\mu \quad \square$$

P3

2) Si μ se concentra en A y ν en A^c , entonces

$$\mu(B) = 0 = \nu(C) \quad \forall B \subseteq A^c, C \subseteq A$$

$$\Rightarrow \text{Si } B \subseteq A^c, \text{ entonces } |\mu|(B) = \sup \sum |\mu(C_i)| = 0$$

$$(C_i) \in \text{PF}(B)$$

$$\text{y si } C \subseteq A, \text{ entonces } |\nu|(C) = 0$$

$$\Rightarrow \mu + \nu.$$

Por otra parte, si $|\mu|$ está concentrada en A y $|\nu|$ en A^c

$$\text{entonces } |\mu|(B) = 0 = \sup \sum |\mu(C_i)| \quad \forall B \subseteq A^c$$

$$(C_i) \in \text{PF}(B)$$

$$\Rightarrow \mu(B) = 0$$

y de forma análoga se ve que ν está concentrada en A^c .

$$\Rightarrow \mu + \nu.$$

b) $\|\mu + \nu\| \leq \|\mu\| + \|\nu\|$ siempre se tiene (d. triangular)

Vemos la otra desigualdad: Sea $\varepsilon > 0$, existe $(A_i) \in PF(X)$,

$(B_i) \in PF(X)$ tales que

$$|\mu|(X) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum |\mu(A_i)| \quad (\text{def supremum})$$

$$|\nu|(X) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum |\nu(B_i)|$$

y sea A tal que $\mu(B \cap A) = \mu(B)$, $\nu(B \cap A^c) = \nu(B)$

$$\sum |\mu(A_i)| = \sum |\mu(A_i \cap A)| = \sum |(\mu + \nu)(A_i \cap A)|$$

$$\text{y } \sum |\nu(B_i)| = \sum |(\mu + \nu)(B_i \cap A^c)|$$

$\nwarrow$
 A^c , sorry: c

luego

$$\begin{aligned} |\nu|(X) + |\mu|(X) &\leq \varepsilon + \sum |(\mu + \nu)(A_i \cap A)| + \sum |(\mu + \nu)(B_i \cap A^c)| \\ &\leq |(\mu + \nu)(\underbrace{X \cap A}_A)| + |(\mu + \nu)(X \cap A^c)| + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon + |\mu + \nu|(X) \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \rightarrow 0$, se concluye.

c) Tomemos los medidos $\{\delta_x \mid x \in X\}$. Si $x \neq y$, $\delta_x \perp \delta_y$:

$$\text{Tomemos } A = \{x\} \text{ y } \delta_x(B) = \delta_x(B \cap A)$$

$$\delta_y(B) = \delta_y(B \cap A^c)$$

Si hubiera un denso numerable $\{\mu_m\} \subseteq \mathcal{M}(X, F)$, para cada

$x \in X$, existiría $m_x \in \mathbb{N}$ tal que $\|\mu_{m_x} - \delta_x\| < \frac{1}{10}$, pero por cardinalidad,

$x \mapsto m_x$ no puede ser inyectiva, luego $\exists x, y \in X$, $\|\mu_{m_x} - \delta_x\| < \frac{1}{10}$

$$\|\mu_{m_x} - \delta_y\| < \frac{1}{10} \text{ pero } 2 = \|\delta_x\| + \|\delta_y\| = \|\delta_x - \delta_y\| \leq \|\delta_x - \mu_{m_x}\|$$

$$+ \|\mu_{m_x} - \delta_y\| < \frac{2}{10}$$

$\rightarrow \text{contrad.}$