

MA3802-1 Teoría de la Medida**Profesor:** Sebastián Donoso.**Auxiliares:** Benjamín Barrientos, Felipe Flores Ll. y Arie Wortsman.**Fecha:** 22 de Septiembre del 2020

Auxiliar 8

P1. Sean $\{f_n\}, \{g_n\} \subset L^1$, $f, g \in L^1$ tales que $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$ puntualmente ctp tales que $|f_n| \leq g_n$ y $\int g_n d\mu \rightarrow \int g d\mu$. Pruebe que $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

P2. Suponga que $\{f_n\} \subset L^1$, $f \in L^1$ y $f_n \rightarrow f$ puntualmente ctp. Pruebe que $\int |f - f_n| d\mu \rightarrow 0$ si y sólo si $\int |f_n| d\mu \rightarrow \int |f| d\mu$.

Indicación: Utilice el resultado obtenido en la parte anterior.

P3. Sea H una variable aleatoria de un espacio de probabilidad. Se define su función de distribución por $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$,

$$F(t) = \mu(\{x \in X \mid H(x) \leq t\})$$

- a) Demuestre que F es creciente y continua por la derecha.
- b) Pruebe que para toda función medible $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(t) d\mu_F(t) = \int_X \phi(H(x)) d\mu(x)$$

P4. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita. Denotamos por $\mathcal{L}^0$ el espacio de funciones medibles reales y por L^0 a su cociente por la relación de igualdad ctp. Defina $d : \mathcal{L}^0 \times \mathcal{L}^0 \mapsto \mathbb{R}$ por

$$d(f, g) = \int_X \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} d\mu(x)$$

Sabiendo que $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ es una función estrictamente creciente y acotada (por 1) en $[0, \infty]$,

- **(Propuesto)** Muestre que d está bien definida y es una métrica en L^0 .
- Sean $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^0$ y $f \in \mathcal{L}^0$. Pruebe que $d(f_n, f) \rightarrow 0$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0$$

- Pruebe la siguiente versión (mejorada) del TCD: Sean $\{f_n\} \subset \mathcal{L}^0$ y $f \in \mathcal{L}^0$. Si $d(f_n, f) \rightarrow 0$ y existe $g \in \mathcal{L}^1$ tal que $|f_n| \leq g$, entonces

$$\lim \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) = 0$$

Nota: Asuma que $|f| \leq g$.