

MA3802-1 Teoría de la Medida**Profesor:** Sebastián Donoso.**Auxiliares:** Benjamín Barrientos, Felipe Flores Ll. y Arie Wortsman.**Fecha:** 22 de Septiembre del 2020

Auxiliar 5

- P1.** Sea $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ y $f^{-1}((r, \infty]) \in \mathcal{M}$ para cada $r \in \mathbb{Q}$, entonces f es $\mathcal{M}$ -medible.
- P2.** Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles, pruebe que $\{x \mid \lim f_n(x) \text{ existe}\}$ es medible.
- P3.** Suponga que la medida μ es completa, entonces:
- a) Si f es medible y $f = g$ en casi todas partes, entonces g es medible
 - b) **(propuesto)** Si f_n es medible para cada $n \in \mathbb{N}$ y $f_n \rightarrow f$ en casi todo punto. Entonces f es medible.
- P4.** El propósito de esta pregunta es probar que no hay σ -álgebras numerables (salvo las finitas). Suponga que $\mathcal{F}$ es una σ -álgebra numerable en X .
- a) Pruebe que X es infinito.
 - b) Para cada $x \in X$, considere $A(x) = \bigcap_{x \in B \in \mathcal{F}} B$. Pruebe que $A(x) \in \mathcal{F}$ y que, si $\emptyset \neq A(x) \cap A(y)$, entonces $A(x) = A(y)$.
 - c) Pruebe que, para cada $B \in \mathcal{F}$, $B = \bigcup_{x \in B} A(x)$
 - d) Pruebe que $\{A(x) \mid x \in X\}$ es infinito y concluya.