MA3802-1 Teoría de la Medida
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliares: Benjamín Barrientos, Felipe Flores Ll. y Arie Wortsman.
Fecha: 22 de Septiembre del 2020

Auxiliar 2

P1. Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un álgebra, $\mathcal{A}_\sigma$ la colección de uniones numerables de elementos en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ la colección de intersecciones numerables de elementos en $\mathcal{A}_\sigma$. Sea μ_0 una premedida en $\mathcal{A}$ y μ^* su medida exterior inducida.

a) Para cualquier $E \subset X$ y $\epsilon > 0$, existe $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset A$ y $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \epsilon$

b) Si $\mu^*(E) < \infty$, entonces E es μ^*-medible si y solamente si existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ con $E \subset B$ y $\mu^*(B \setminus E) = 0$

c) **Propuesto:** Si μ_0 es σ-finita, se puede levantar la restricción $\mu^*(E) < \infty$ en b).

P2. Sea μ^* la medida exterior en X inducida por la premedida finita μ_0. Si $E \subset X$, definimos la medida interior de E como $\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$. Probar que E es μ^*-medible si y solamente si $\mu_*(E) = \mu^*(E)$.

Indicación: Utilice el problema anterior.

P3. Sea X un espacio métrico y $\epsilon > 0$. Se define

$$\mu_\epsilon^*(A) = \min\{|I| \mid A \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, \epsilon)\}$$

a) Probar que μ_ϵ^* es una medida exterior.

b) Definamos $\psi(A) = \lim_{\epsilon \to 0} \mu_\epsilon^*(A)$. Encontrar explícitamente $\psi(A)$ y probar que es una medida.

P4. Sea X un espacio métrico, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ su σ-álgebra boreliana y $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+$ una medida finita. Probar que todo boreliano B cumple la siguiente propiedad:

$$\forall \epsilon > 0, \exists F \subset X \text{ cerrado}, \exists U \subset X \text{ abierto}, \quad F \subset B \subset U \text{ y } \mu(U \setminus F) \leq \epsilon$$

Para ésto, se sugiere seguir el esquema

a) Probar que la propiedad es cierta si B es cerrado.

b) Definir $\mathcal{F} = \{B \in \mathcal{P}(X) \mid \text{La propiedad es cierta para } B\}$ y probar que es una σ-álgebra.

c) Concluir.