Clase 25 MA3705. 21 de diciembre 2020.

Tabla

- Una aplicación del método de la elipsoide
- P y NP

Una aplicación

Problemas de conectividad fraccional

Considere el problema de encontrar un vector $x \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ tal que: para todo corte $S \subseteq V$ $(S \neq V, \emptyset)$ de un grafo, $x(\delta(S)) \geq 1$.

Continuación

P y NP

Problemas fáciles y no tan fáciles

Problemas de optimización combinatorial:

1. Matching máximo en grafos bipartitos
2. Cubrimiento mínimo en grafos bipartitos
3. Matching máximo en grafos generales
4. Cubrimiento mínino en grafos generales
5. Camino más corto
6. Camino más largo
7. Independiente más grande en 2 matroides
8. Independiente más grande en 3 matroides

Problemas en P

Coloquialmente un problema está en **P** si existe un algoritmo polinomial que lo resuelva.
Formalmente, la clase **P** está definida para problemas de decisión.

Problemas de optimización en **P**

Un problema Q del tipo

> *Q: ¿Existe un objeto x para de valor $f(x) \geq K$? (la instancia es la codificación del problema que incluye f y K)*

Q es un problema en **P** si existe un algoritmo que en cada I resuelve el problema Q en tiempo polinomial en el número de bits de I.
Ejemplo: Matching en grafos bipartitos.

Problemas de optimización en **NP**

Un problema Q del tipo

> *Q: ¿Existe un objeto x para de valor $f(x) \geq K$? (la instancia es la codificación I del problema que incluye f y K)*

Q es un problema en **NP** si existe un algoritmo de verificación que dado I y dado cualquier x es capaz de verificar que x es solución factible de I y que $f(x) \geq K$.
Ejemplo: Camino más largo.

Observación

P$\subseteq$ NP

¿Son iguales?
Problemas del milenio (Clay Mathematics Institute propuso 7 problemas el año 2000).

1. Yang–Mills y Salto de Masa
2. Hipótesis de Riemann
3. P vs NP
4. Ecuación de Navier–Stokes
5. Conjetura de Hodge
6. Conjetura de Poincaré (único que ha sido resuelto)
7. Conjetura de Birch Swinnerton-Dyer

Reducciones de Karp

Decimos que un problema A es más fácil (reducible, $\leq_P$) que un problema B si existe un algoritmo φ polinomial tal que

I instancia positiva de A si y solo si $\varphi(I)$ instancia positiva de B.

(Intuitivamente: Podemos resolver A si sabemos resolver B)

Ejemplo:

Camino Hamiltoniano: ¿Existe un camino que pasa por todos los vértices de G?
Ciclo Hamiltoniano: ¿Existe un ciclo que pasa por todos los vértices de G?
Camino más largo: ¿Existe un camino de largo al menos k en G?

Ciclo Hamiltoniano $\leq_P$ Camino Hamiltoniano $\leq_P$ Camino más largo.

Ciclo H $\leq_P$ Camino H

Problemas NP difíciles

Un problema Q es NP-difícil si es más difícil que todo problema en **NP**. Es decir, para todo R en **NP**,

$$R \leq_P Q$$

Teorema de Cook-Levin

SAT: Dada una función booleana φ (formada por variables, $\vee, \wedge, \neg$), determinar si existe x tal que $\varphi(x)$ es verdadera.
SAT es un problema NP-difícil.

Problemas NP-completos

Un problema es NP-completo si está en NP y es NP-difícil.

Q es NP-completo si

Ojo: Hay problemas NP-difíciles que ni siquiera están en NP.

Algunos problemas NP-completos

1. Vendedor viajero
2. Camino/Ciclo Hamiltoniano
3. Camino más largo
4. SAT
5. Intersección de 3 matroides.
6. Cubrimiento por vértices en grafos generales
7. ...

¿Qué hacer al enfrentarse a problemas difíciles

1. Demostrar que son NP-completos
2. Heurísticas.
3. Relajaciones.
4. Algoritmos de Aproximación.

Una α-aproximación para un problema Q de minimización es un algoritmo polinomial que entrega una solución factible para Q cuyo valor es a lo más α veces el valor del óptimo.

Un algoritmo de aproximación para el vendedor viajero

TSP (Vendedor viajero)

Dado un conjunto de n puntos, y para cada par un valor $d(x,y) \geq 0$ que satisfacen desigualdad triangular (representa la distancia de x a y), encontrar un paseo que pase por los n puntos (al menos una vez) de valor mínimo.

Normalmente pensamos que d está escrito en el grafo completo sobre los n puntos.

2 aproximación para TSP

1. Encontrar MST de G
2. Duplicar arcos para tener un grafo Euleriano (todos los vértices de grado par)
3. Devolver paseo Euleriano.

¿Mejora?

1. Encontrar MST de G
2. Corregir paridad de vértices de grado impar.
3. Devolver paseo Eulereiano

Algoritmo de Cristofides (1976)

¿Mejor posible?

2020: Preprint de Karlin, Klein y Gharan que anuncia un factor de $1{,}5 - 10^{-36}$