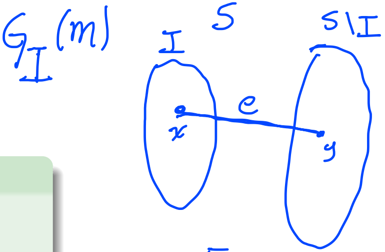
Clase 20 MA3705. 30 de noviembre 2020.

Escribas: Javier Salas.

Tabla

- Intersección de matroides.

Intersección de Matroides.



Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide e $I \in \mathcal{I}$ un independiente.

Grafo de intercambios de I en $\mathcal{M}$

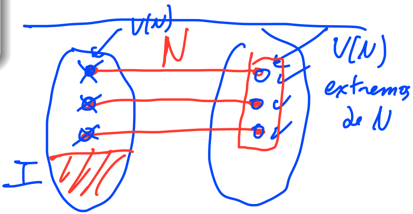
$G_I(\mathcal{M}) = (S, E_I)$ bipartito con partes I, $S \setminus I$:
$xy \in E_I$ $(x \in I, y \in S \setminus I)$ si y solo si $I + y - x \in \mathcal{I}$.

$xy \in E_I$
$\iff I \Delta V(e) \in \mathcal{I}$
$I + y - x \in \mathcal{I}$

Teorema: Sea N matching en $G_I(\mathcal{M})$

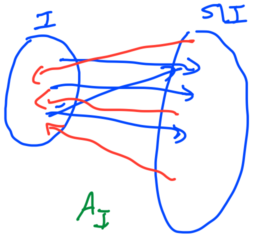
Si N es el único matching perfecto entre sus extremos $V(N)$.
Entonces $I \Delta V(N) \in \mathcal{I}$.

$J = I \Delta V(N) \in \mathcal{I}$



Repaso: Intercambio de dos matroides

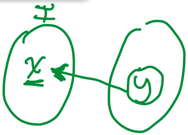
Sean $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ matroides con $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$



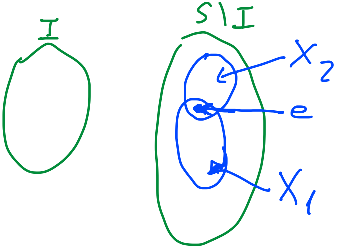
Digrafo de intercambios de I en $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$

$D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = (S, A_I)$ es la unión de:
$G_I(\mathcal{M}_1)$ orientado de I a $S \setminus I$, $\rightarrow$
$G_I(\mathcal{M}_2)$ orientado de $S \setminus I$ a I. $\leftarrow$

Si $x \in I, y \in S \setminus I$:
$xy \in A_I \iff I + y - x \in \mathcal{I}_1$
$yx \in A_I \iff I + y - x \in \mathcal{I}_2$.



$e \in X_1 \cap X_2 \Rightarrow I + e \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.



Conjuntos especiales

$X_1 = \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_1\}$
$X_2 = \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_2\}$

Sean $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ matroides.

Dualidad débil

Si $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, $T \subseteq S$ cualquiera, entonces $|I| \leq r_1(T) + r_2(S \setminus T)$.

Luego, si $|I| = r_1(T) + r_2(S \setminus T)$ entonces I es conjunto independiente máximo de $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

Dem:

$$\underbrace{I \cap T}_{\in \mathcal{I}_1} \subseteq T \Rightarrow r_1(T) \geq |I \cap T|$$

$$+$$

$$I \setminus T \subseteq S \setminus T \Rightarrow r_2(S \setminus T) \geq |I \setminus T|$$

Algoritmo/Teorema de Intersección de matroides

Alg. Inter. de Matroides (Aigner-Dowling / Lawler 1975)

Entrada: Oráculos para $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$

$I \leftarrow \emptyset$.

Repetir

  Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$

  $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_1\}$

  $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_2\}$

  si $\exists X_1$-X_2 *camino* **entonces**

    Encontrar X_1-X_2 camino más corto P

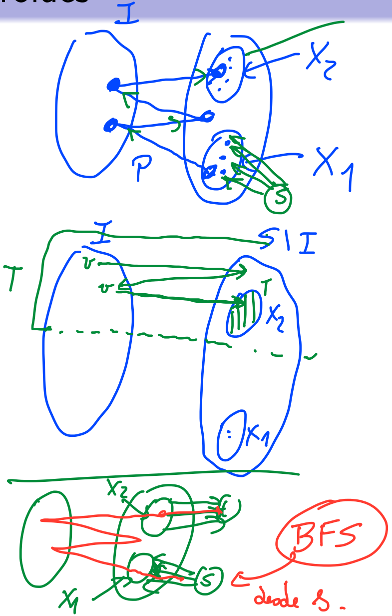
    $I \leftarrow I \Delta V(P)$

  en otro caso

    $T \leftarrow \{v \in S \colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$

    devolver (I, T)

fin



Algoritmo/Teorema de Intersección de matroides

Alg. Inter. de Matroides (Aigner-Dowling / Lawler 1975)

Entrada: Oráculos para $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$
$I \leftarrow \emptyset$.
Repetir
  Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$
  $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_1\}$
  $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_2\}$
  si $\exists X_1$-X_2 *camino* **entonces**
    Encontrar X_1-X_2 camino más corto P
    $I \leftarrow I \Delta V(P)$
  en otro caso
    $T \leftarrow \{v \in S : \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$
    devolver (I, T)
fin

Probemos 2 teoremas:

Teorema 1

Si P es X_1-X_2 camino más corto entonces $\underline{I \Delta V(P)} \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$
(Ojo: $|I \Delta V(P)| = |I| + 1$.)

Teorema 2

Si no hay X_1-X_2 camino ~~más corto~~ entonces para el (I, T) devuelto:
$|I| = r_1(T) + r_2(S \setminus T)$.

Teo 1 + Teo 2 implican:

$I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ óptimo.

Teorema 1

I $S \setminus I$ $D_I(M_1, M_2)$ P $D_I(\boxed{M_2}, M_1)$

Teorema: Si P es X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, entonces $I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Clase pasada: Basta probar que $J = I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$. ✓

Teorema 1.: $\boxed{I+z\,\Delta\, V(N)} \in \mathcal{I}_1' \iff I\,\Delta\, V(P) \in \mathcal{I}_1' \iff I\,\Delta\, V(P) \in \mathcal{I}_1$

Teorema: Si P es X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, entonces $I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Clase pasada: Basta probar que $J = I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$.

suma directa

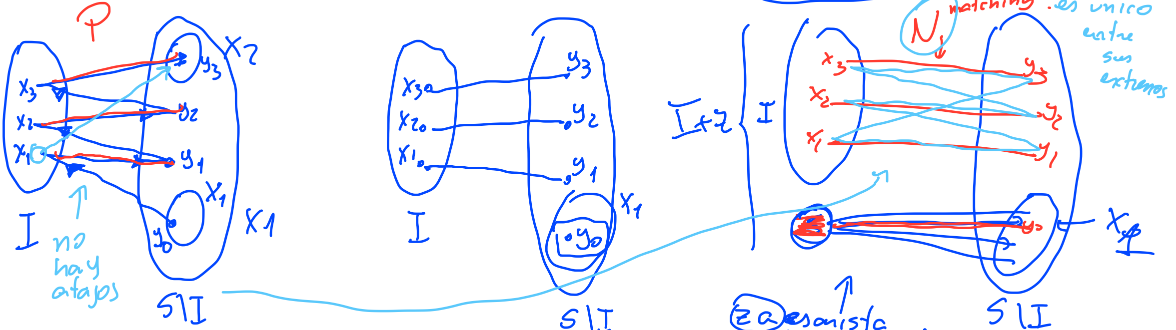
$$\mathcal{M}_1' = (S + z, \mathcal{I}_1' = \mathcal{I}_1 \cup \{W + z : W \in \mathcal{I}_1\}) = \mathcal{M} \oplus \underbrace{\mathcal{U}(\{z\}, 1)}_{\text{uniforme}}.$$

$(I+z)+y-x \in \mathcal{I}_1'$

$(I+z-x)+z \in \mathcal{I}_1'$

$I+y-x \in \mathcal{I}_1$

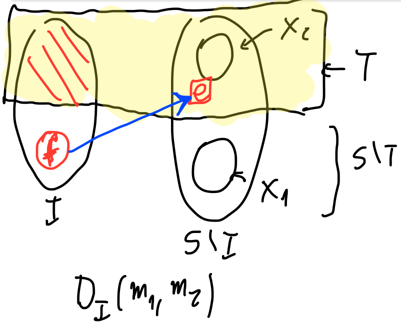
$D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ $\qquad$ $G_I(\mathcal{M}_1) \longleftarrow G_{I+z}(\mathcal{M}_1')$



$z\,a$ es arista $\iff (I+\cancel{z})+a-\cancel{z} \in \mathcal{I}_1'$

Teorema 2

Teorema: Si no hay X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ y $T = \{v \in S : \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$ entonces $|I| = \underline{r_1(T)} + \underline{r_2(S \setminus T)}$ ✓



$X_2 \subseteq T$

$X_1 \subseteq S \setminus T$

① $r_1(T) = |I \cap T|$. pdq

siempre $r_1(T) \geq |I \cap T| \leftarrow \in \mathcal{I}_1$

Si no hay igualdad

$r_1(T) > |I \cap T| \Rightarrow \exists e \in T \setminus I$ tq $\boxed{I \cap T + e} \in \mathcal{I}_1$

aumenta a J con $|J| = |I|$ $\quad I \in \mathcal{I}_1$

pues J tiene $|J| = |I|$

$J \subseteq I + e$

$J = I + e - f \in \mathcal{I}_1$

$f \in I \setminus T$

$\Rightarrow (f, e) \in A_I$. pero $f \notin T$, $e \in T$ $\rightarrow\leftarrow$

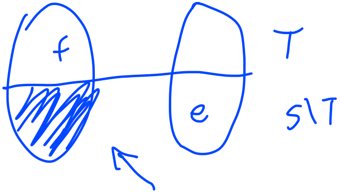
$I + e \notin \mathcal{I}_1$

$\Uparrow$

$e \notin X_1$

Teorema 2

Teorema: Si no hay X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ y $T = \{v \in S \colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$ entonces $|I| = r_1(T) + r_2(S \setminus T)$



② $r_2(S \setminus T) = |I \cap S \setminus T| = |I \setminus T|$

$$\therefore \; |I| = |I \cap T| + |I \setminus T|$$
$$= r_1(T) + r_2(S \setminus T).$$

Algoritmo/Teorema de Intersección de matroides

máximo.

Alg. Inter. de Matroides (Aigner-Dowling / Lawler 1975)

Entrada: Oráculos para $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$
$I \leftarrow \emptyset$.
Repetir
  Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ $\mathcal{O}(n^2)$
  $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_1\}$
  $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_2\}$
  si $\exists X_1$-X_2 *camino* **entonces**
    Encontrar X_1-X_2 camino más corto P
    $I \leftarrow I \Delta V(P)$
  en otro caso
    $T \leftarrow \{v \in S \colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$
    devolver (I, T)
fin

El algoritmo entrega un conjunto independiente común en tiempo $O(n^3)$ (trabajo + oráculos).

Comentario: Existen algoritmos polinomiales que calculan independientes comunes de peso máximo.

Teorema de Intersección de Matroides

$$\max\{|I| \colon I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(T) + r_2(S \setminus T) \colon T \subseteq S\}$$

Un par de consecuencias rápidas del TIM

Teorema de Intersección de Matroides (TIM)

$$\max\{|I|: I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(T) + r_2(S \setminus T): T \subseteq S\}$$

Vimos TIM $\implies$ Teorema de König en grafos bipartitos.

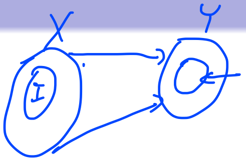
$M_1|_X \quad M_2|_X$

Otra consecuencia:

Sean $(S, \mathcal{I}_1)$, $(S, \mathcal{I}_2)$ dos matroides. Entonces para todo $X \subseteq S$:

$$\max\{|I|: \boxed{I \subseteq X}, I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(T) + r_2(X \setminus T) : T \subseteq X\}$$

Matroide Imagen



$J \in \mathcal{I}_f \Leftrightarrow \exists\, I \in \mathcal{I}$
$f(I) = J$

Sea $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$ una matroide
$f\colon X \to Y$ una función sobreyectiva.
Definimos matroide imagen de f: $\mathcal{M}_f = (Y, \{f(I) \colon I \in \mathcal{I}\})$

Teorema

- $\boxed{\mathcal{M}_f \text{ es matroide}}$
- Si r, r_f son las funciones de rango de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_f$ entonces $r_f(Q) = \min_{Z \subseteq Q} r(f^{-1}(Z)) + |Q \setminus Z|$

TIM.