Clase 2~~3~~ 4 MA3705. ~~11~~ 18 de diciembre 2020.

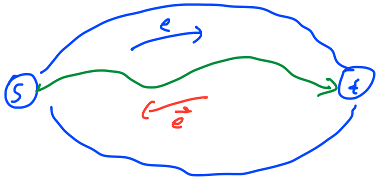
Tabla

- Edmonds-Karp
- Método de Elipsoide (idea)

Edmond-Karp 2: Caminos aumentantes de menor largo

Algoritmo de Edmonds-Karp de mayor capacidad

$f \longrightarrow N^f$



Edmonds, Karp (1972)

Entrada: Red $N = (G, u, s, t)$ con capacidades enteras

$f : E \to \mathbb{R}$, $f \leftarrow 0$

Construir N_+^f. (solo capacidad positiva)

mientras *Existe camino aumentante* P *en* N_+^f **hacer**

  Elegir P de menor número de arcos.

  $f \leftarrow f + \chi^P \mathrm{cap}^f(P)$.

  Recalcular N_+^f.

fin

devolver f.

Teorema

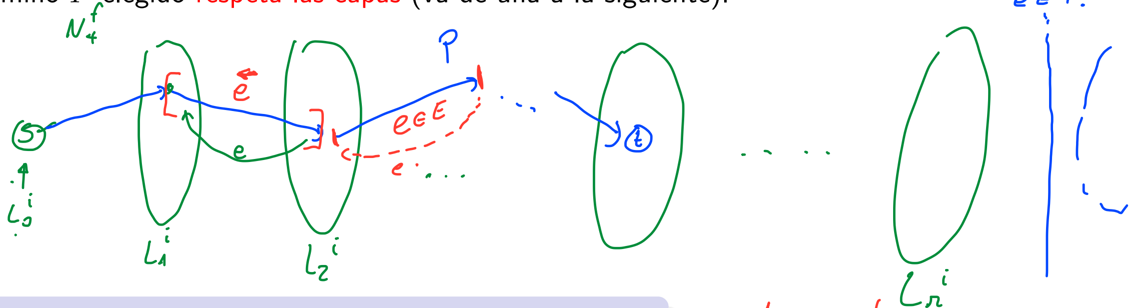
Edmonds Karp es fuertemente polinomial.

Capas: BFS en N_+^f

$\boxed{cap(P)} = \min_{e \in P} \boxed{U^f(e)} > 0$

empujan flujo en P → aumentan $cap(P)$ en arcos $e \in E \cap P$
→ disminuir $cap(P)$ en arcos e tq $\tilde{e} \in P$.

Sea G_i grafo residual (N_+^f) en la i-ésima iteración.
Construir capas $L_0^i, L_1^i, \ldots, L_r^i$ basadas en BFS: $\text{dist}_i(s, v) = k \iff v \in L_v^i$
Camino P elegido respeta las capas (va de una a la siguiente).



Lema

Arcos que salen: $E(G_i) \setminus E(G_{i+1}) \subseteq P$ ← Además al menos 1 arco de P sale

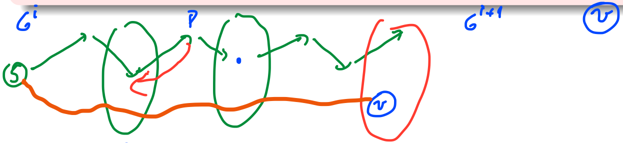
Arcos que entran $E(G_{i+1}) \setminus E(G_i) \subseteq$ reversos de P.

Consecuencias

En qué capa de G_i está v.

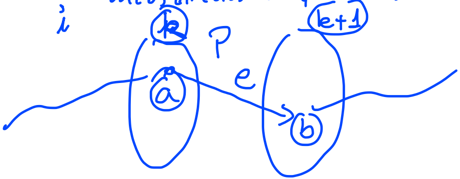
Lemas

1. $\forall v, i$: $\text{dist}_i(s,v) \leq \boxed{\text{dist}_{i+1}(s,v)}$
2. $\forall e \in E \cup \overleftarrow{E}$. e sale de $E(G_i)$ para a lo más $n/2$ iteraciones i distintas.



Orden: 1º agreguemos arcos reversos de P que entran → dist(s,v) se mantiene

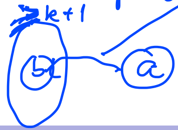
2º eliminemos arcos directos de P que salen. → dist(s,v) sólo puede crecer



Si e sale: en la etapa i y vuelve a entrar en la etapa j

j

Como e = a, b. entra sólo si e es reverso de P ⇒ a tiene que estar en el nivel k+2.



1. En la iteración i, al menos 1 arco sale de $E(G_i)$.
2. Como cada arco sale a lo más $O(n)$ veces, el número total de iteraciones es: $O(nm)$
3. Cada iteración toma: $O(n+m) = O(m)$

grafo original $n = O(m)$.

Teorema

Edmonds-Karp tiene complejidad $O(nm^2)$.

Resumen algorítmico para flujos y cortes (suponemos $n = O(m)$)

1. Dado f es s-t flujo factible máximo, se puede encontrar s-t corte mínimo en tiempo $O(m)$.
2. Algoritmos para datos enteros:

Algoritmo	Complejidad
Ford-Fulkerson (1956)	$O(m\mathrm{OPT})$
Edmonds-Karp I (1972)	$O(m \log \mathrm{OPT})$
Edmonds-Karp II (1972)	$O(nm^2)$
Goldberg-Tarjan (1988)	$O(n^2m), O(n^3), O(nm \log n)$
Orlin+King Rao Tarjan (2013)	$O(nm)$

Con muchas mejoras en el caso de capacidades pequeñas.

Método de Elipsoide

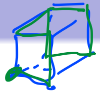
PL: Optimización de una función lineal en un poliedro. Factibilidad: Encontrar un punto en un poliedro o determinar si es vacío.

Dados A, b y c (digamos a valores racionales). Resolver

$$\begin{aligned} \max\ c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

PL

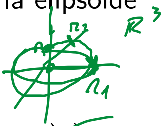
Breve historia



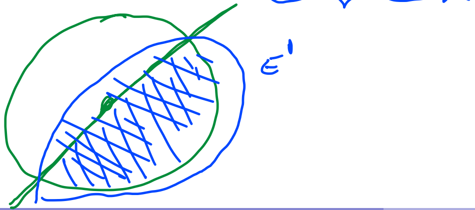
1. (1827) Fourier publica su método (Fourier-Motzkin) para determinar factibilidad eliminando variables.
2. (1939) Kantorovich propone un método (similar a simplex actual) para resolver PL
3. (1947) Dantzig propone el método Simplex (y simplificaciones)
4. (1947) Von Neumann desarrolla dualidad
5. (196X) Cobham-Edmonds desarrollan la tesis de polinomialidad (básicamente definen la clase P)
6. (1960-70) PL empieza a ser muy importante, pero se desconoce si existen algoritmos polinomiales.
7. (1972) Shor y luego Nemirovski/Yudin estudian algoritmos iterativos para programas convexos y proponen el **método de la elipsoide**

semi

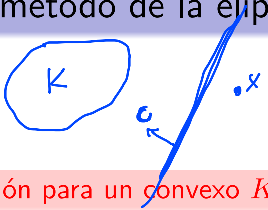
1. Elipsoides: Dado un punto $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ y una matriz $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ definida positiva, la elipsoide de centro $\bar{x}$ definida por M es:
$$E(M, \bar{x}) = \{y \in \mathbb{R}^d \colon \overbrace{(y - \bar{x})^T M^{-1} (y - \bar{x})} \leq 1\}$$



2. Elipsoide ortogonal con ejes de largo r_i para coordenada i es $E\left(0, \begin{pmatrix} r_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & r_d^2 \end{pmatrix}\right)$
3. Hay fórmulas para calcular volumen de una elipsoide E y además para toda linea que pasa por el centro de E, se puede calcular elipsoide mínima E' que contiene a una mitad de E.
Lema de la media elipsoide: $\mathrm{Vol}(E') \leq \mathrm{Vol}(E) \underbrace{\exp(-1/(2d))}$



Idea básica del método de la elipsoide (versión factibilidad)

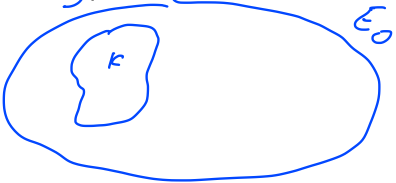


Oráculo de separación para un convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$

Dado un convexo K, y un punto x, el oráculo responde una de dos:

1. $x \in K$
2. o reporta un hiperplano de separación:
   Dirección c tal que $c^T x < c^T y$ para todo $y \in K$.

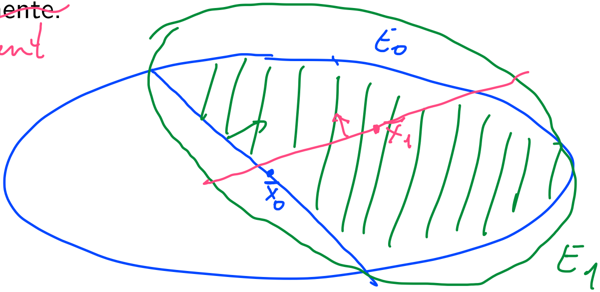
Problema General: Dado un oráculo para K y una elipsoide E_0 que contiene a K encontrar un punto $x \in K$.



Idea: secuencias de elipsoide

Encontrar $E_0, E_1, \ldots, E_m$ elipsoides que contienen a K cuyo volumen decrezca ~~exponencialmente.~~

geometricamente



$E_0, E_1, \ldots, E_m$

Virtudes/Problemas

1. Si $\frac{\mathsf{Vol}(K)}{\mathsf{Vol}(E_0)}$ no es tan pequeño (formalmente, si $d \ln \frac{\mathsf{Vol}(K)}{\mathsf{Vol}(E_0)} \geq C$) entonces encontramos un punto de K en a lo más C iteraciones.
2. ¡Si solo nos interesa un punto suficientemente cerca de K esto es bueno!
3. Problemas: ¿si $\mathsf{Vol}(K) = 0$? ¿Elipsoide inicial?

1979: Khachiyan propone una versión del método de la elipsoide que sirve para factibilidad de PLs y corre en tiempo polinomial.


The New York Times

Similar Transportation Bond Issues Are Passed in New York and Jersey

CARTER SAID TO ASK FOR LOYALTY CHECK OF AIDES ON POLITICS

IRAN'S CIVIL GOVERNMENT OUT; HOSTAGES FACE DEATH THREAT; OIL EXPORTS BELIEVED HALTED

STUDENTS WARN U.S.

F.A.A. Seeks Fine of $1.5 Million For 'Unairworthy' Braniff Flights

Main Iran Oil Port Reported Closed And Prices of Spot Petroleum Soar

Energy Dept. Accuses 9 Refiners Of $1.18 Billion Oil Overcharges

A Soviet Discovery Rocks World of Mathematics

A Soviet Discovery Rocks World of Mathematics. (New York Times, Nov. 7 1979)

Ideas del método de elipsode (versión PL)

- Transformar PL en factibilidad usando dualidad.

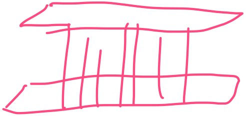
PL
$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$
=
DL
$$\begin{aligned} \min\ & b^T y \\ A^T y &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

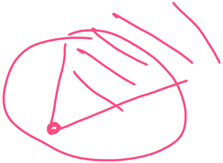
$$Q \left\{ \begin{aligned} c^T x &= b^T y \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \\ A^T y &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned} \right.$$

Ideas del método de elipsoide (versión PL)

- Factibilidad: Encontrar punto en $\underline{Q = \{x \in \mathbb{R}^d \colon Ax \leq b}\}$ con datos enteros o determinar si $Q = \emptyset$.

- Q podría no tener vértices (ejemplo) y tener volumen 0.





- **Álgebra lineal:** Transformar Q en Q' con vértices y con volumen (dimensión completa)

- **Optimización lineal:** Caracterizar vértices como soluciones únicas de subsistemas $\boxed{Cx = p}$ de Q.

$x_j = \frac{\det(\quad)}{\det(C)}$

- **Fórmula de Cramer:** si $x = C^{-1}p$ entonces se puede calcular x_j como la razón de dos determinantes. Se deduce una cota para los valores de x_j:

Ideas del método de elipsoide (versión PL)

- Los vértices de Q' son puntos con coordenadas racionales cuyo numerador y denominador (enteros) están acotados por $(dU)^d$, con U el valor máximo de los datos del problema y d la dimensión.
- Conclusión: Los vértices de Q' están en $E_0 = B(0, \sqrt{d(dU)^{2d}})$ de volumen a lo más $(2\sqrt{d(dU)^{2d}})^d \leq (2d(dU)^{2d+1})^d$.
- Con un poco más de trabajo se prueba que o bien Q' es vacío o bien $\mathsf{Vol}(Q')$ es al menos $(2d(dU)^{2d+1})^{-d}$
- Luego el método de la elipsoide termina en a lo más $O(d \log \frac{\mathsf{Vol}(Q')}{\mathsf{Vol}(E_0)}) = O(d^3 \log(dU))$ iteraciones.

Detalles finales

- El oráculo de separación para x en Q' es: revisar si x satisface la descripción de Q', si no lo hace devolver cualquier restricción insatisfecha. Esto se puede hacer en tiempo polinomial en d y $\log U$.
- Cada iteración del método (calcular la nueva elipsoide) es polinomial (de hecho lineal) en los datos iniciales, por lo que el método de la elipsoide toma tiempo polinomial en d y en $\log U$.

Breve historia (3)

1. (1979) Khachiyan. PL está en la clase P de problemas polinomiales.
2. (1980) Lovasz, Grötschel y Schrijver prueban que optimización es equivalente a separación (es decir, se puede separar en un poliedro Q en tiempo polinomial si y solo si se puede optimizar cualquier función lineal sobre Q en tiempo polinomial).

   Consecuencia importante: Se pueden resolver PLs con cantidades enormes de restricciones (no polinomiales inclusos) si se puede implementar un oráculo de separación.
3. (1984) Algoritmo proyectivo de Karmakar para PL (método de punto interior).
4. (1989) Mejoras por Vaidya (básicamente $O(n^{2,5} \log U)$)
5. (2019) Cohen, Lee, Song logran esencialmente $O(n^{\max(\omega, 2+1/6)} \log U)$

   $\boxed{n \times n}$ $\boxed{n \times n}$ n^{ω}

Problema abierto: ¿Existen algoritmos fuertemente polinomiales para PL?