Clase 21 MA3705. 4 de diciembre 2020.

Tabla

- Flujos y Cortes en Redes.
- Dualidad débil.
- Flujos residuales.

Flujos y Cortes en Redes.

Notación para redes

Red $N = (G, u, s, t)$:
$G = (V, E)$ digrafo.
$u\colon E \to \mathbb{R}_+$ función de capacidad.
$s \in V$ nodo origen, $t \in V$ nodo destino.

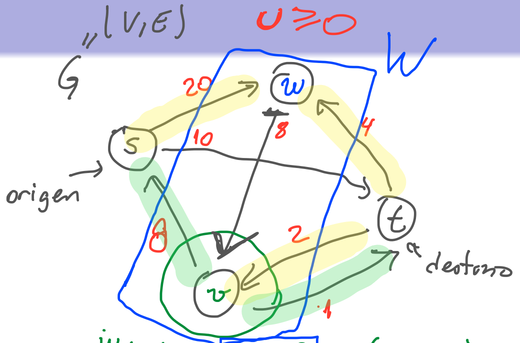
Sea $x\colon E \to \mathbb{R}$, $v \in V$, $W \subseteq V$

valor neto de entrada

entra a v — sale de v

$$x^{\text{in}}(v) = x(\delta^-(v)) - x(\delta^+(v))$$
$$x^{\text{out}}(v) = x(\delta^+(v)) - x(\delta^-(v)) = -x^{\text{in}}(v)$$
$$x^{\text{in}}(W) = x(\delta^-(W)) - x(\delta^+(W))$$
$$x^{\text{out}}(W) = x(\delta^+(W)) - x(\delta^-(W)) = -x^{\text{in}}(W)$$

adv: $x^{out}(W) \neq \sum_{w \in W} x^{out}(w)$



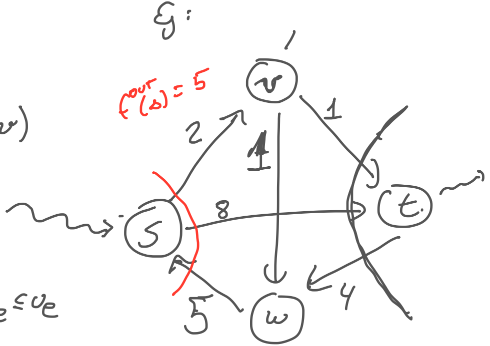
$u^{in}(v) = \boxed{2+8} - (8+1)$
$= 10 - 9 = 1$
$u^{out}(v) = -1$

$u^{in}(W) = 20+4+2$
$4 \quad - 8 - 1$

s-t flujos

$f \in \mathbb{R}^E \quad f(e) = f_e$

Sea $N = (G, u, s, t)$ una red, $\boxed{f : E \to \mathbb{R}}$



Conservación de flujo

flujo neto de entrada

f es s-t flujo si $\forall v \in V - s - t, \qquad f^{\text{in}}(v) = 0. = f^{out}(v)$

El valor de un s-t flujo es valor$(f) = f^{\text{in}}(t)$.

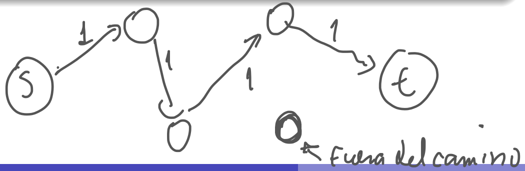
Un s-t flujo f es factible si además $0 \le f \le u$.

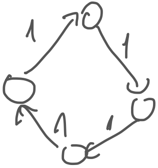
$\forall e$
$0 \le f_e \le u_e$

INDICATRIZ de P

Si P es s-t camino, χ^P es s-t flujo.
Si C es ciclo, χ^C es s-t flujo.

valor$(f) = f^{in}(t) = 1 + 8 - 4$
$= 5$



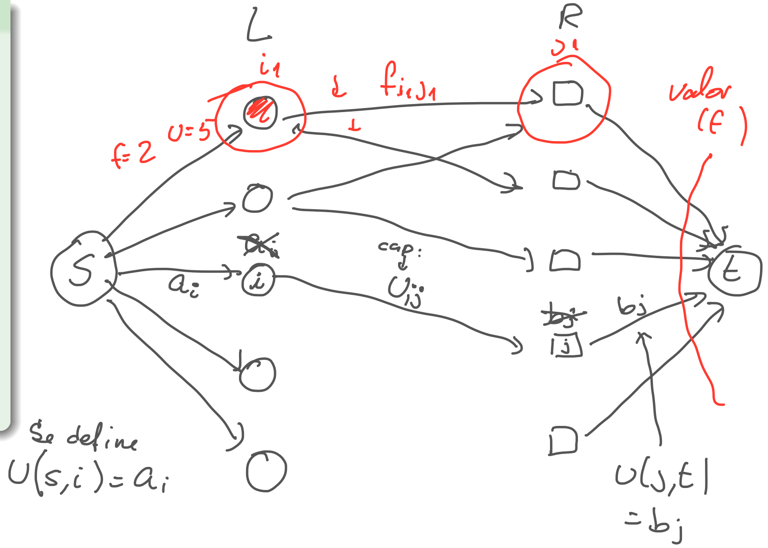


Problema de transporte.

Dadas fábricas L y bodegas R:

- Cada $i \in L$ produce hasta a_i unidades diarias.
- Cada $j \in R$ almacena hasta b_j unidades diarias.
- Se pueden mandar hasta u_{ij} unidades de i a j.

Determinar cantidad máxima que se puede producir y guardar en R.



Dualidad débil

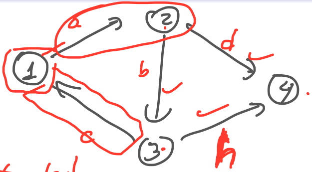
Propiedad de s-t flujo

Sea f un s-t flujo en $N = (G, u, s, t)$, entonces

$$\text{valor}(f) = f^{\text{in}}(t) = f^{\text{out}}(s)$$

$f^{in}(v) = 0$

Ej:



~~$e = (a, b)$~~

Dem:

$$f^{in}(t) - f^{out}(s) = f^{in}(t) + f^{in}(s)$$

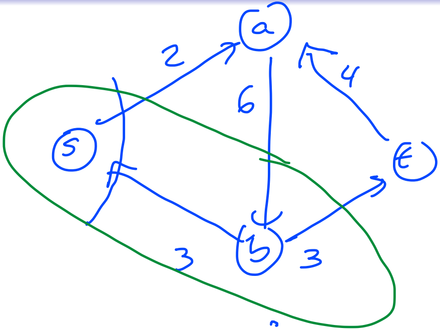
$$= \sum_{v\in V} f^{in}(v) = \sum_{v\in V} f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v))$$

$$= \boxed{\sum_{v\in V}\sum_{e\in\delta^-(v)}} f_e - \sum_{v\in V}\sum_{e\in\delta^+(v)} f_e$$

$$= \sum_{e\in E} f_e - \sum_{e\in E} f_e = 0 \qquad \blacksquare$$

$$\bigcup_{v\in V} \delta^-(v) = E$$

valor(f) = 2 - 3 = -1



s-t corte

Conjunto $X \subseteq V$ con $s \in X, t \notin X$.

Lema

Para todo s-t flujo f y todo s-t corte X.

valor$(f) = f^{\text{out}}(X) = f(\delta^+(X)) - f(\delta^-(X))$

3+2-6 = -1

Dem:

$$\text{valor}(f) = f^{out}(s)$$

$$= \sum_{v \in X} f^{out}(v) = \sum_{v \in X} f(\delta^+(v)) - f(\delta^-(v))$$

(*)

$X \ni s$

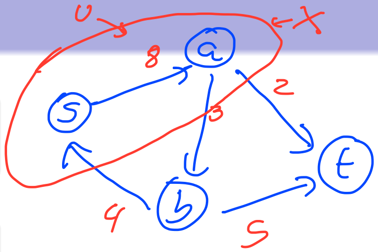
$X \not\ni t$

$$= \boxed{\sum_{v\in X} \sum_{e \in \delta^+(v)} f_e} - \sum_{v \in X} \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = [f(E[X]) + f(\delta^+(X))] - [f(E[X]) + f(\delta^-(X))]$$

$\underset{\text{(arcos con ambos ext en } X)}{\overset{\shortparallel}{E[X]}}$

$$= f^{out}(X).$$

Dualidad débil de flujos y cortes



Capacidad de un s-t corte X en (G, u, s, t)

Llamamos $\text{cap}(X) = u(\delta^+(X))$.

$\text{cap}(X) = 5.$

Dualidad débil

$\forall s$-t flujo factible f, s-t corte X, $\quad \text{valor}(f) \leq \text{cap}(X).$

En particular, $\quad \max_f \text{valor}(f) \leq \min_X \text{cap}(X).$

$f \geq 0 \qquad \sum_{e \in \delta^-(X)} f_e \geq 0$

Dem: f.

Del lema anterior

$$\text{valor}(f) = f^{out}(X) = f(\delta^+(X)) - \underbrace{f(\delta^-(X))}_{\geq 0} \leq f(\delta^+(X)) \leq u(\delta^+(X)) = \text{cap}(X)$$

Probaremos que hay dualidad fuerte $(=)$

Flujos residuales

Problema del flujo máximo

Dada una red $N = (G, u, s, t)$ queremos encontrar s-t flujo factible que maximice valor(f).
¡Es un programa lineal!

Problema del flujo máximo

Dada una red $N = (G, u, s, t)$ queremos encontrar s-t flujo factible que maximice valor(f).
¡Es un programa lineal!

$$\max \text{ valor}(f)$$

cons. de flujo $\quad f^{\text{out}}(v) = 0, \ \forall v \in V - s - t$

factible $\quad 0 \leq f \leq u$

$$\max \sum_{e \in \delta^+(s)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(s)} f_e$$

$$\sum_{e \in \delta^+(v)} f_e - \sum_{e \in \delta^-(v)} f_e = 0, \ \forall v \in V - s - t$$

$$0 \leq f_e \leq \underline{u_e}, \forall e \in E$$

Simplex (no polinomial)
Métodos polinomiales: Elipsoide y Punto Interior. → polinomiales pero no fuertemente polinomiales.
Buscaremos un algoritmo combinatorial.

Primera idea: aumentos glotones

Dado s-t flujo factible f en red $N = (G, u, s, t)$. ¿Cómo encontrar f' con valor(f') > valor(f).

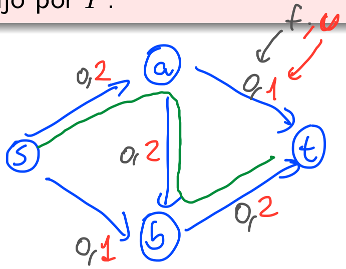
Idea

Encontrar s-t camino P en $E' = \{e \in E \colon f_e < u_e\}$
Mandar cap$(P) := \min_{e\in P}(u_e - f_e) > 0$ unidades de flujo por P.

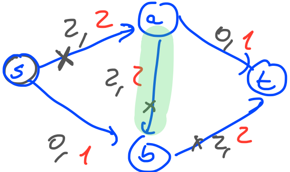
flujo tiene valor 2

$f'_e = f_e$ si $e \notin P$

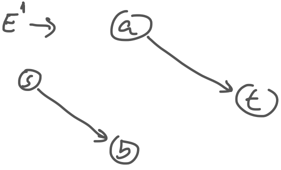
$f'_e = f_e + \mathrm{cap}(P)$ si $e \in P$



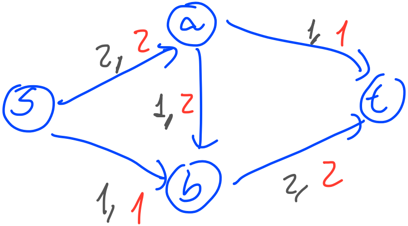
$E' = E$



$E' \rightarrow$



Ejemplo



valor = 3.

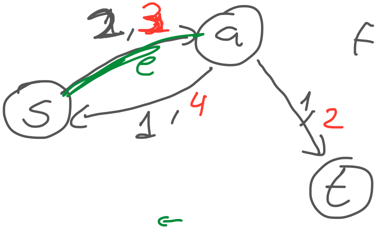
Dado s-t flujo factible f en (G, u, s, t), definimos la red residual (G^f, u^f, s, t) como

$G^f = (V, E \cup \overleftarrow{E})$ con $\overleftarrow{E} = \{\overleftarrow{e} : e \in E\}$ arcos nuevos tal que $\overleftarrow{e}$ es antiparalelo a e.

e reverso

$\forall e \in E : \ u^f(e) = u(e) - f(e)$

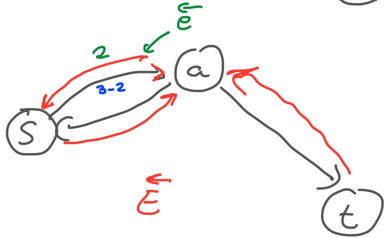
$\forall e \in E : u^f(\overleftarrow{e}) = f(e)$



G^f

$u^f(e) = u(e) - f(e)$

$u^f(\overleftarrow{e}) = f(e)$



g

Flujos residuales

Sea g un s-t flujo residual (no nec. factible) en (G^f, u^f, s, t).

Sea $\bar{g} \colon E(G) \to \mathbb{R}$ dada por $\bar{g}(e) = g(e) - g(\overleftarrow{e})$.

$\forall v \in V, \qquad g^{\text{out}}(v) = \bar{g}^{\text{out}}(v)$

Flujos residuales (cont.)

Sea g un flujo residual factible en (G^f, u^f, s, t). Entonces

1. $\bar{g}$ es s-t flujo en (G, u, s, t)
2. $\boxed{f + \bar{g}}$ es s-t flujo factible en (G, u, s, t)
3. $\text{valor}(f + \bar{g}) = \text{valor}(f) + \text{valor}_{G^f}(g)$