Clase 23 MA3705. 11 de diciembre 2020.

¿ESCRIBAS?

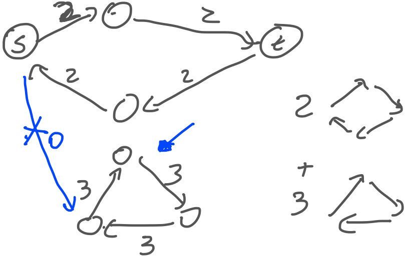
Tabla

- Descomposición de Flujo
- Edmonds-Karp

Descomposición de Flujo

Teorema de descomposición de flujo

$\boxed{f \geq 0}$ un s-t flujo en G. $\mathcal{P}_{s,t}$: s-t caminos. $\mathcal{P}_{t,s}$: t-s caminos. $\mathcal{C}$: ciclos.



Teorema: existen constantes $\lambda \geq 0$ tal que:

comb. cónicas

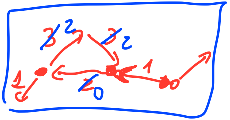
valor$(f) = 0$ entonces $f = \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C$.

valor$(f) > 0$ entonces $f = \sum_{P \in \mathcal{P}_{s,t}} \lambda_P \chi^P + \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C$.

valor$(f) < 0$ entonces $f = \sum_{P \in \mathcal{P}_{t,s}} \lambda_P \chi^P + \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C$.

El número total de coeficientes no nulos es a lo más $|E|$

G



λ_C

Demostración: Inducción en $|E|$. ($|E|=0$ obvio)

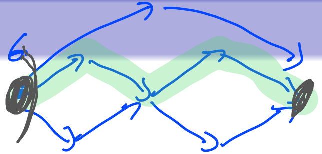
- Borrar arcos con flujo 0.
- Si existe ciclo C. Sea $\lambda_C = \min_{e \in C} f(e) = f(e^*)$ entonces $f' = f - \lambda_C \chi^C$ es s-t flujo no negativo en $G - e$ de igual valor.

$e^* \in C$

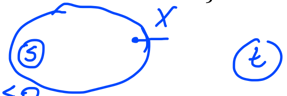
valor(f') = valor$(f) - \lambda_C$ valor(χ^C), valor$(\chi^C) = 0$

f' tiene al menos 1 arco e^* con $f'(e^*) = 0$.

Teorema de descomposición de flujo



- Suponemos acíclico.
- Si valor$(f) > 0$, sea $X = \{v :$ alcanzables desde s con arcos con flujo$\}$
- Si $t \notin S$, entonces



$$0 < \text{valor}(f) = f^{out}(X) = \overbrace{f(\delta^+(X))}^{0} - f(\delta^-(X)) \le 0$$

- Luego $t \in \cancel{S}\ X$ y existe s-t camino P.

$$\lambda_P = \min_{e \in P} f(e) = f(e^*) > 0 \qquad e^* \in P$$

$$f' = f - \lambda_P \chi^P \qquad f' \text{ s-t flujo.}$$

se puede eliminar e^* de E.

↳ x inducción $\quad f =$ comb. cónica de s-t caminos

- Caso valor$(f) < 0$ análogo.

Obs: La descomposición es algorítmica.

Corolario importante

valor(f) $= \sum_{P\in\mathcal{P}_{s,t}} \lambda_P \underbrace{\text{valor}(\chi^P)}_{=1} + \sum_{C\in\mathcal{C}} \lambda_C \underbrace{\text{valor}(\chi^C)}_{=0}$

Sea f es un s-t flujo $\boxed{\text{factible}}$ en N con valor$(f) > 0$.
El teorema de descomposición de flujo garantiza que

$$f = \sum_{P\in\mathcal{P}_{s,t}} \lambda_P \chi^P + \sum_{C\in\mathcal{C}} \lambda_C \chi^C, \checkmark$$

con todos los $\lambda \geq 0$ y a lo más m términos no nulos.

Luego, existe un s-t camino en N con $\boxed{\min_{e\in P} f_e} \geq \lambda_P \geq \dfrac{\text{valor}(f)}{m}$

pues en la descomp. hay $\leq m$ caminos

Edmond-Karp 1: Caminos de mayor capacidad

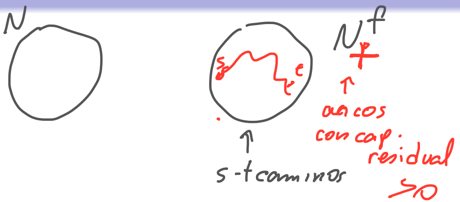
Algoritmo de Edmonds-Karp de mayor capacidad

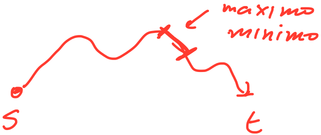
Edmonds, Karp (1972)

Entrada: Red $N = (G, u, s, t)$ con capacidades enteras
$f : E \to \mathbb{R}$, $\boxed{f \leftarrow 0}$
Construir N^f_+. (solo capacidad positiva)
mientras *Existe camino aumentante* P *en* N^f_+ **hacer**
  Elegir P de mayor capacidad residual. Dijkstra.
  $f \leftarrow f + \chi^P \mathrm{cap}^f(P)$.
  Recalcular N^f_+.
fin
devolver f.

Teorema

EK1 termina en $O(m \log \mathrm{OPT})$ iteraciones.





 (caso capacidades enteras)

$f^0 = 0$

Sea OPT el valor del flujo óptimo. Sea v_k el valor del flujo f^k de la k-ésima iteración.

valor(f^k)

1. Existe flujo en N^{f^k} de valor: $OPT - v_k$.
2. Luego, existe camino aumentante de valor: $\frac{OPT - v_k}{m}$ $\quad v_{k+1} \geq v_k + \frac{OPT - v_k}{m}$
3. Luego $\mathrm{OPT} - v_{k+1} \leq (OPT - v_k) - \left(\frac{OPT - v_k}{m}\right) = (OPT - v_k)\left(1 - \frac{1}{m}\right)$.
4. Por lo tanto

$1 + x \leq e^x$

$$OPT - v_k \leq (OPT - \underset{=0}{v_0}) \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)^k \leq OPT \cdot e^{-\frac{k}{m}} < 1$$

$k = \lceil m \cdot \ln(OPT) \rceil$

¿Cuanto debe valer k para asegurar l.d < 1?

$\therefore$ Después de $O(m \ln(OPT))$ iteraciones. $v_k = OPT$

Observaciones

1. EK1 es un algoritmo débilmente polinomial. ✓
2. No se sabe si es fuertemente polinomial (abierto)

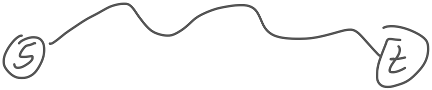
Edmond-Karp 2: Caminos ~~de mayor capacidad~~ más cortos.

Edmonds, Karp (1972)

Entrada: Red $N = (G, u, s, t)$ con capacidades enteras
$f : E \to \mathbb{R}$, $f \leftarrow 0$
Construir N_+^f. (solo capacidad positiva)
mientras *Existe camino aumentante* P *en* N_+^f **hacer**
- Elegir P de menor número de arcos.
- $f \leftarrow f + \chi^P \text{cap}^f(P)$.
- Recalcular N_+^f.

fin
devolver f.

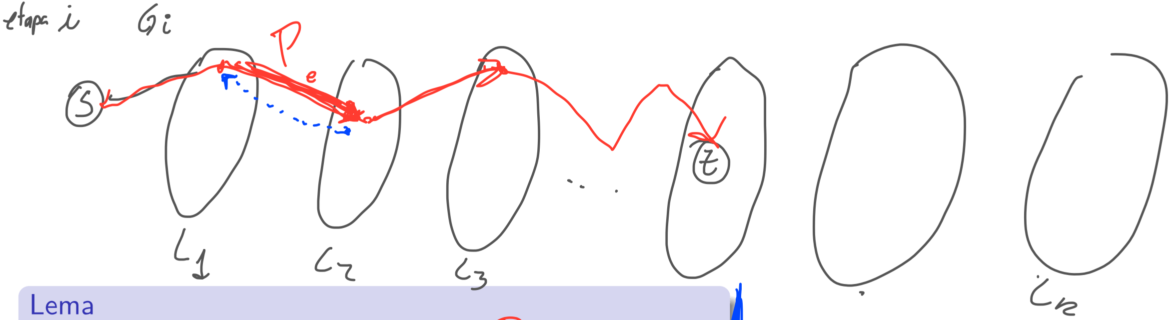
N_f^f



Teorema

Edmonds Karp es fuertemente polinomial.

Sea G_i grafo residual (N_+^f) en la i-ésima iteración.
Construir capas $L_0^i, L_1^i, \ldots, L_r^i$ basadas en BFS: $\text{dist}_i(s, v) = k \iff v \in L_v^i$
Camino P elegido respeta las capas (va de una a la siguiente).



Lema

Arcos que salen: $E(G_i) \setminus E(G_{i+1}) \subseteq P$
Arcos que entran $E(G_{i+1}) \setminus E(G_i) \subseteq$ reversos de P.