Clase 19 MA3705. 20 de noviembre 2020.

Tabla

- Intersección de matroides.

Intersección de Matroides.

Grafo de intercambio de una matroide

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide e $I \in \mathcal{I}$ un independiente.

Grafo de intercambios de I en $\mathcal{M}$

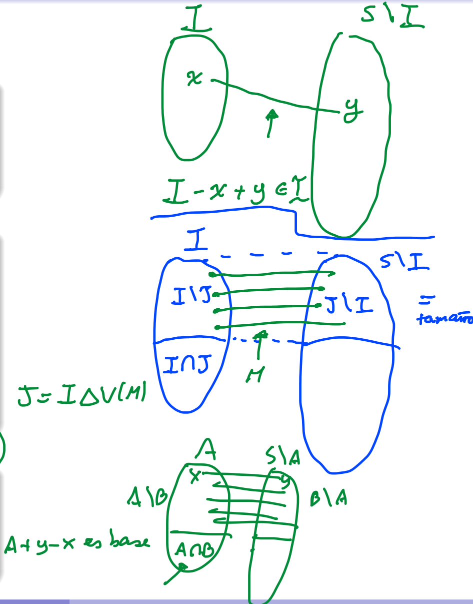
$G_I(\mathcal{M}) = (S, E_I)$ bipartito con partes I, $S \setminus I$:
$xy \in E_I$ $(x \in I, y \in S \setminus I)$ si y solo si $I + y - x \in \mathcal{I}$.

Teorema: Si $J \subseteq S$, $|J| = |I|$

1. $J \in \mathcal{I} \implies \exists$ matching perfecto $I \setminus J : J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M})$.
2. Existe único matching perfecto $I \setminus J : J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M}) \implies J \in \mathcal{I}$.

Corolario: Intercambio fuerte de bases

Sean A y B son bases de una matroide. Existe biyección $\varphi \colon A \to B$ tal que $\forall a \in A$, $\boxed{A + \varphi(a) - a}$ es base.



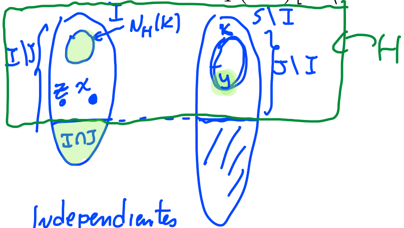
Teoremas de grafo de intercambio

Teorema (1): Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide, $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq S$, $|J| = |I|$.

$J \in \mathcal{I} \implies$ existe matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M})$.

Dem: Si $H = G_I(\mathcal{M})[I \setminus J \cup J \setminus I]$ no tiene matching perfecto...

$\nexists$ matching perfecto $\Updownarrow$ (Hall) $\exists K \subseteq J \setminus I.$ $|N_H(K)| < |K|$



$\Rightarrow (I \setminus J) \setminus N_H(K) \neq \emptyset$

x $xy \notin E(H)$ (pues x no es vecino de K)

$\Rightarrow I + y - x \notin \mathcal{I}$

$\Rightarrow I + y \notin \mathcal{I}$. luego $\exists$ circuito $C \subseteq I + y$. $y \in C$.

Independientes

① $(I \cap J) \cup N_H(K) \subseteq I \in \mathcal{I}$

② $(I \cap J) \cup K \subseteq J \in \mathcal{I}$

Como $|①| < |②| \Rightarrow$ Aumento: $\exists y \in K$ tq

$A = (I \cap J) \cup N_H(K) + y \in \mathcal{I}$

$C \nsubseteq A$

$\Rightarrow \exists z \in C \setminus A.$

$zy \notin E(H)$ (pues z no es vecino de K)

$\Rightarrow I + y - z \notin \mathcal{I}$ $I + y - z \in \mathcal{I}$

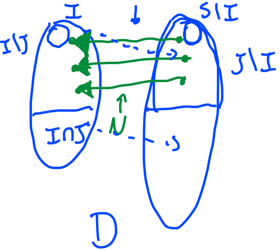
(pero $I+y$ tiene 1 sólo circuito C, al quitarse z, vuelve a ser indep.)

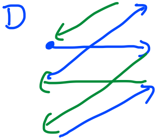
Teoremas de grafo de intercambio

Teorema (2): Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide, $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq S$, $|J| = |I|$.

Único matching perfecto N entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M})$ $\implies J \in \mathcal{I}$

Dem: Orientemos N en $G_I(\mathcal{M})$ hacia I, el resto hacia $S \setminus I$. ¿Ciclos?





Si C fuera ciclo.

C es ciclo alternante

$N \Delta C$ es otro matching perfecto de $I \setminus J$ a $J \setminus I$.

$\therefore$ No hay ciclos en D.

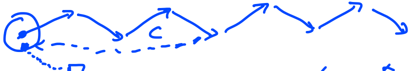
D es un DAG.

D dag $\rightarrow$ D tiene orden topológico. $v_1 v_2 \dots v_n$ enumeración de $V(D)$ $\overset{S}{\shortparallel}$

tq $v_i v_j \in E(D) \Rightarrow i < j$

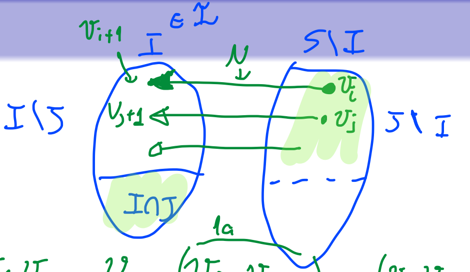
¿Cómo encontrar orden? Todo DAG tiene nodo sin arcos entrantes

¿Por qué?



P camino maximal

El primer nodo de cualquier camino maximal $\square$ no tiene arcos entrantes



ALG para encontrar orden top. en DAG D.

for $i = 1$ to n.

  encontrar nodo sin arcos entrantes v

  $v_i \leftarrow v$

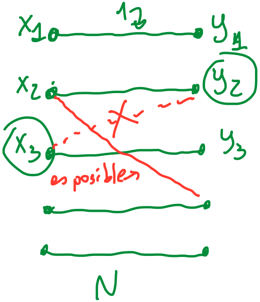
  $D \leftarrow D - v_i$.

$\underbrace{v_1\, v_2 \dots v_k}_{I \cap J}$ $\overbrace{(v_i \;\; v_{i+1})}^{1a}$ $(v_j \;\; v_{j+1})$ . . . .

v_i: $\in J \setminus I$

v_{i+1}: su pareja en N

Solamente Mirando N



. . . . $(y_1 x_1)$ . . . $(y_2 x_2)$

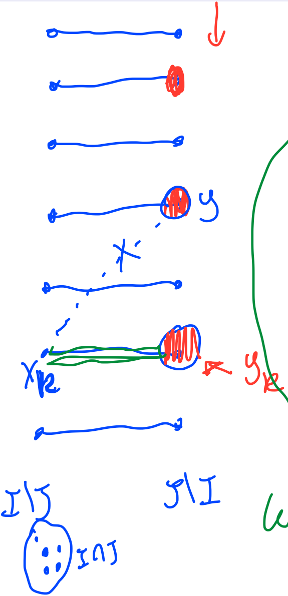
Si $x_i y_j \in E(D) \Rightarrow i \leq j$

← En el dibujo todas las aristas de $G_I(M)$ entre extremos de N van "hacia abajo"

Si $J \notin \mathcal{I}$.

$\Rightarrow$ existe circuito $C \subseteq J \Rightarrow C$ debe intersectar $J \setminus I$

Sea y_k el vértice de C con mayor índice



$y_k \in C$ con mayor índice. $C \subseteq J$.

$\Rightarrow \boxed{y_k \in SPAN(C - y_k)}$

Por otro lado si $\boxed{y \in C - y_k}$ (y está más arriba que y_k)

$\Rightarrow x_k y \notin E(G_I(m))$.

$\Rightarrow I + y - x_k \notin \mathcal{I}$ $\quad (I - x_k) + y$

$\in \mathcal{I}$ $\quad$ deja de ser indep.

$\Rightarrow y \in SPAN(I - x_k)$

$\therefore C - y_k \subseteq SPAN(I - x_k)$

$\therefore \boxed{Span(C - y_k) \subseteq SPAN(I - x_k)}$

Luego $y_k \in SPAN(I - x_k) \Rightarrow I - x_k + y_k \notin \mathcal{I}$

$\hookrightarrow x_k y_k \notin E(G_I(m)) \rightarrow$ ~~sí~~

Conclusión:

Si se encuentra matching N en $G_I(\mathcal{M})$ tal que N es el único matching perfecto de sus extremos, entonces podemos intercambiar los extremos manteniendo independencia (camino de intercambio).

$I \Delta V(N) \in \mathcal{I}$.

Llamémos a N matching de intercambio.
¿Cómo hacer algo similar en dos matroides $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$?

$I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$
queremos aumentar I

Idea: Usar caminos que **alternen** entre un matching de $G_I(\mathcal{M}_1)$ y un matching $G_I(\mathcal{M}_2)$.

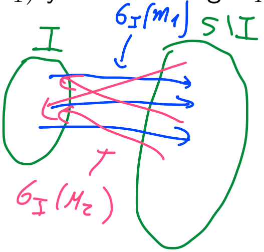
Conclusión:

Si se encuentra matching N en $G_I(\mathcal{M})$ tal que N es el único matching perfecto de sus extremos, entonces podemos intercambiar los extremos manteniendo independencia (camino de intercambio).

Llamémos a N matching de intercambio.
¿Cómo hacer algo similar en dos matroides $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$?

Idea: Usar caminos que **alternen** entre un matching de $G_I(\mathcal{M}_1)$ y un matching $G_I(\mathcal{M}_2)$.

Dado $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.



Digrafo de intercambios de 2 matroides

$D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ es la superposición de
$G_I(\mathcal{M}_1)$ orientado de I a $S \setminus I$.
$G_I(\mathcal{M}_2)$ orientado de $S \setminus I$ a I.

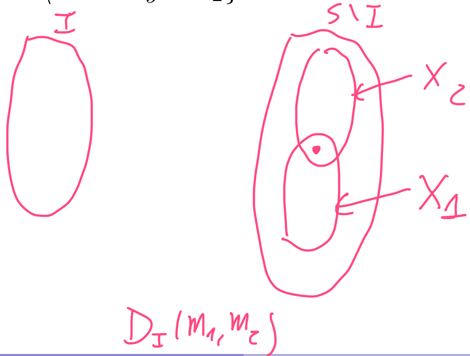
Sea $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, con $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1); \mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ matroides.

$X_1 = \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_1\}, \quad X_2 = \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_2\}$

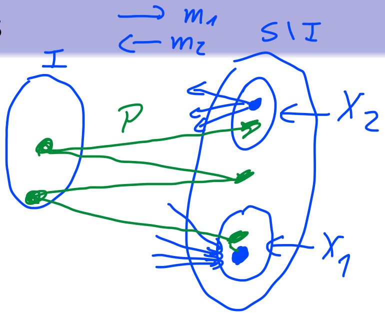
¿Qué pasa si $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$?

y^*

y $I + y^* \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$



Algoritmo/Teorema de Intersección de matroides



Algoritmo Intersección de Matroides (Aigner-Dowling 1975 / Lawler 1975)

Entrada: Oraculos para $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1), \mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$

$I \leftarrow \emptyset$.

Repetir

- Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$
- $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_1\}$
- $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_2\}$
- **si** $\exists X_1$-X_2 *camino* **entonces**
  - Encontrar X_1-X_2 camino más corto P ← aumenta
  - $I \leftarrow I \Delta V(P)$
- **en otro caso**
  - $T \leftarrow \{v \in S : \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$
  - **devolver** (I, T)
- **fin**

$D_I(m_1, m_2)$

$\therefore \ |I \Delta V(P)| = |I| + 1$

Aumento: $|I \Delta V(P)| = |I| + 1$

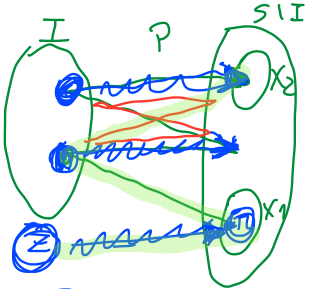
Teorema: Si P es X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, entonces $I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Basta probar que $J = I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$ (el argumento es simétrico pues P reverso es X_2-X_1 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1)$).

Aumento: $|I \Delta V(P)| = |I| + 1$

Teorema: Si P es X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, entonces $I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$

$\mathcal{M}_1' = (S + z, \mathcal{I}_1' = \{W \subseteq S : W \setminus \{z\} \in \mathcal{I}_1\})$. $I + z \in \mathcal{I}_1'$ $\quad |J| = |I + z|$
$\mathcal{M}_2' = (S + z, \mathcal{I}_2' = \{W \subseteq S : W \in \mathcal{I}_2\})$.



$\leftarrow D_I(M_1, M_2)$

$(I+z) + r - z$
$\shortparallel$
$I + r \in \mathcal{I}_1$
$\uparrow$
X_1

N
$\Downarrow$
Aristas pares de $P+zr$.
es matching perfecto

$D_{I+z}(M_1, M_2)$

$\leadsto$ Como P es mínimo no hay otro m. perfecto entre extremos de $N \Rightarrow (I+z) \Delta V(P+zr) \in \mathcal{I}_1' \Rightarrow I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$.