Clase 22 MA3705. 11 de diciembre 2020.

Tabla

- Flujos residuales.
- Flujo-Máximo Corte-Mínimo
- Ford-Fulkerson
- Descomposición de Flujo

Flujos residuales

Recuerdo

Red $N = (G, u, s, t)$

$G = (V, E)$, $u \colon E \to \mathbb{R}_+$, $s, t \in V$

s-t flujo $f \colon E \to \mathbb{R}$

Conservación $\forall v \in V - s - t$

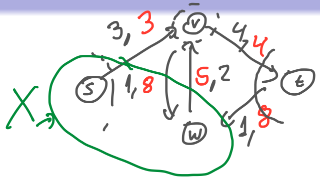
$f^{\text{out}}(v) = f(\delta^+(v)) - f(\delta^-(v)) = 0$

Flujo factible: $0 \le f \le u$
valor$(f) = f^{\text{out}}(s) = f^{\text{in}}(t)$.

$\forall s$-t corte X, f flujo factible.

$f^{\text{out}}(X) = \text{valor}(f) \le \text{cap}(X)$

Dualidad débil.



f:

v:

valor(f) = 3
= 4 − 1 = 3

$f^{out}(X) = 5 - 2 = 3$

$f^{out}(X) = f(\delta^+(X)) - f(\delta^-(X))$

$\le u(\delta^+(X)) = 3 + 5 = 8$

cap(X).

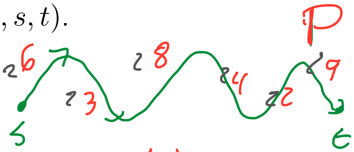
Una observación importante

Llamemos OPT al valor de un s-t flujo máximo en $N = (G, u, s, t)$.
$\mathrm{OPT} > 0$ si y solo si existe s-t camino P de capacidad

$$\mathsf{cap}(P) = \min_{e \in P} u_e > 0$$

Llamemos OPT al valor de un s-t flujo máximo en $N = (G, u, s, t)$.
$\mathrm{OPT} > 0$ si y solo si existe s-t camino P de capacidad

$$\mathrm{cap}(P) = \min_{e \in P} u_e > 0$$



$\mathrm{cap}(P) = 2$

$\chi^P \cdot \mathrm{cap}(P)$ es flujo

Demostración:

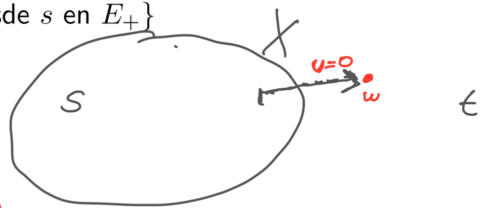
1. Si existe s-t camino P de capacidad positiva, entonces

   $\mathrm{OPT} \geq \mathrm{valor}(\chi^P \mathrm{cap}(P)) = \mathrm{cap}(P) > 0.$

2. Si no existe tal camino, sea $E_+ = \{e \in E : u_e > 0\}$,
   $X = \{v \in V : v$ es alcanzable desde s en $E_+\}$

$t \notin X$ pues. No hay s-t camino en E_+

X es s-t corte



$0 \leq \mathrm{OPT} = \underbrace{\mathrm{valor}(f^*)}_{\text{flujo óptimo}} \overset{\text{D.D.}}{\leq} \mathrm{cap}(X) = u(\delta^+(X)) = 0.$

Red Residual de un flujo factible f en $N = (G, u, s, t)$

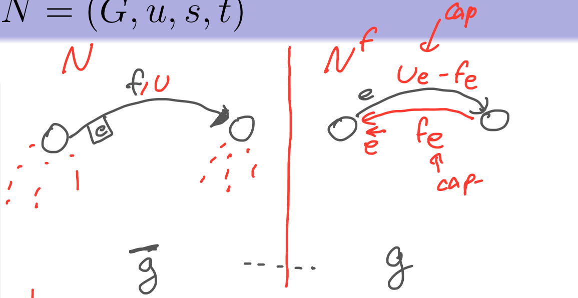
Red residual $N^f = (G^f, u^f, s, t)$

A cada arco e de G se le agrega un reverso $\overleftarrow{e}$ por el cual se puede *devolver flujo*.

$G^f = (V, E \cup \overleftarrow{E})$. $\quad \overleftarrow{E} = \{\overleftarrow{e} : e \in E\}$

$\forall e \in E : \; u^f(e) = u(e) - f(e)$

$\forall e \in E : u^f(\overleftarrow{e}) = f(e)$



Flujos residuales y normalizaciones

Para $g \colon E \cup \overleftarrow{E} \to \mathbb{R}$, (no necesariamente flujo) en N^f se define su normalización $\bar{g} \colon E \to \mathbb{R}$ como $\bar{g}(e) = g(e) - g(\overleftarrow{e})$.

$\forall v \in V : g^{\text{out}}(v) = \bar{g}^{\text{out}}(v)$.

Luego g es flujo en G^f ssi $\bar{g}$ es flujo en G.

$\xrightarrow{e} \quad \bar g(e) = g(e) - g(\overleftarrow{e})$

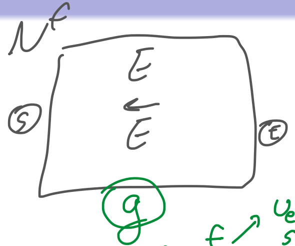
$\bar g^{out}(v) = \bar g(\delta^+_E(v)) - \bar g(\delta^-_E(v))$

$= \sum_{e \in \delta^+_E(v)} g(e) - g(\overleftarrow{e}) - \boxed{\sum_{e \in \delta^-_E(v)} g(e) - g(\overleftarrow{e})}$

$= g(\delta^+_{E \cup \overleftarrow{E}}(v)) - g(\delta^-_{E \cup \overleftarrow{E}}(v)) = g^{out}(v)$

Sean f flujo factible en N. g flujo factible en N^f

1. $\bar{g}$ es flujo en N.
2. $f + \bar{g}$ es flujo factible en N.
3. $\text{valor}(f + \bar{g}) = \text{valor}(f) + \text{valor}_{N^f}(g)$.



$0 \le g \le u^f$ ↗ $u_e - f_e$ si $e \in E$ ↘ f_e si $e \in \overleftarrow{E}$

① ✓

② $(f+\bar{g})^{OUT}(v) = f^{OUT}(v) + \bar{g}^{OUT}(v) = 0$ $\therefore (f+\bar{g})$ es flujo.

$v \in V - s - t$

Sea $e \in E$. $(f+\bar{g})(e) = \boxed{f(e) + \boxed{g(e)} - g(\overleftarrow{e})}$ $\quad (\ge 0,\ \le u^f(\overleftarrow{e}) = f(e))$

- $(f+\bar{g})(e) \ge f(e) - g(\overleftarrow{e}) \ge f(e) - f(e) = 0$
- $(f+\bar{g})(e) \le f(e) + g(e) \le f(e) + u^f(e) = f(e) + u(e) - f(e) = u(e)$.

factible.

③ $\text{valor}(f+\bar{g}) = \text{valor}(f) + \text{valor}(\bar{g}) = \text{valor}(f) + \bar{g}^{OUT}(s) = \text{valor}(f) + g^{OUT}(s)$ ☑

Propiedades de flujos residuales (2)

Sean f, f' flujos factibles en N

Definimos g en N^f como sigue. Para todo $e \in E$:

$$(f(e) \leq f'(e)) \implies g(e) = f'(e) - f(e), \quad g(\overleftarrow{e}) = 0$$

$$(f(e) > f'(e)) \implies g(e) = 0, \quad g(\overleftarrow{e}) = f(e) - f'(e)$$

1. g es flujo factible en N^f ✓ Propuesto
2. $\boxed{f' = f + \bar{g}}$
3. valor(g) = valor(f') − valor(f)

f_g, f^d

N^f

g

$e : f'(e) - f(e)$

Si $f_e \leq f'_e$

$\overleftarrow{e} : 0$

$e : 0$

Si $f'_e < f_e$

$\overleftarrow{e}$

$f(e) - f'(e)$

De qué sirve.

flujo f

valor(f)

N^f

$\exists g$: flujo factible de valor positivo

Si $\exists f'$: valor(f') > valor(f)

Consecuencias

Sea f un s-t flujo factible en N, (OPT valor de un flujo máximo)

1. f es máximo $\iff$ el único flujo factible en N^f es $g \equiv 0$
   $\iff$ no existe s-t camino con capacidad residual positiva en N^f.
2. f no es máximo $\iff$ existe flujo factible en N^f de valor $\mathrm{OPT} - \text{valor}(f)$ > 0 .

Llamamos **camino aumentante** a cualquier s-t camino P en N^f con capacidad $\text{cap}^f(P) = \min_{e \in E} u^f(e) > 0$.

Consecuencias

Sea f un s-t flujo factible en N, OPT valor de un flujo máximo

1. f es máximo $\iff$ no existe camino aumentante.
2. f no es máximo $\iff$ existe flujo factible en N^f de valor $\mathrm{OPT} -$ valor$(f) > 0$

   $\exists$ camino aumentante en N^f.

Flujo máximo, corte mínimo

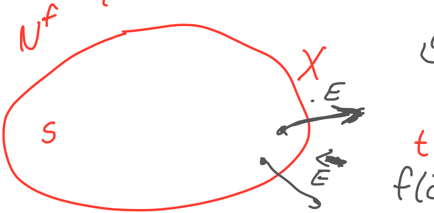
Teorema

Sea N una red

$\max\{\text{valor}(f) : f \text{ } s\text{-}t \text{ flujo factible}\} = \min\{\text{cap}(X) : X, \text{ } s\text{-}t \text{ corte}\}$

Demostración:

1. Existe flujo máximo (solución óptima de un PL).
2. Sea f flujo máximo. No hay camino aumentante en N^f.
3. Sea $X = \{v : \exists\, s\text{-}v$ camino P usando arcos de N^f con capacidad $u^f > 0\}$



N^f s-t corte

$$0 = \text{cap}_{N^f}(X) = u^f(\delta^+_{E\cup\overleftarrow{E}}(X)) = 0$$

$$= u^f(\delta^+(X)\cap E) + u^f(\delta^+(X)\cap \overleftarrow{E})$$

$$= u(\delta_E^+(X)) - f(\delta_E^+(X)) + f(\delta_E^-(X))$$

$$f(\delta_E^+(X)) - f(\delta_E^-(X)) = u(\delta_E^+(X)) = \text{cap}_N(X)$$

$$\text{valor}(f) = f^{out}(X) = \text{cap}_N(X).$$

Ford-Fulkerson

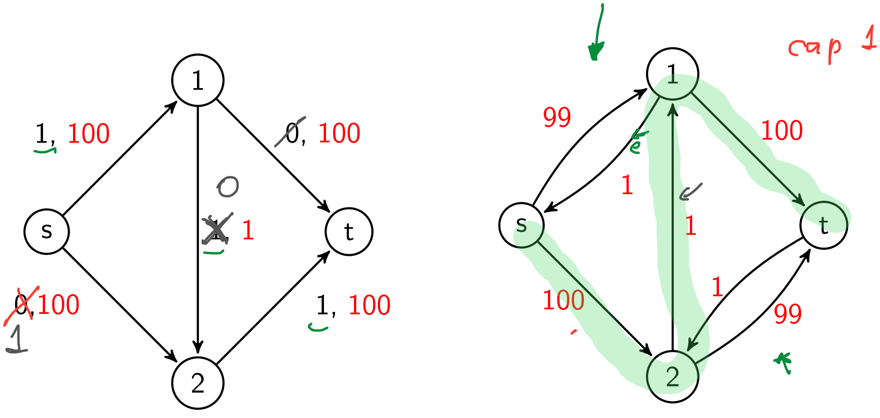
Algoritmo de Ford-Fulkerson (no polinomial)

Ford, Fulkerson (1956)

Entrada: Red $N = (G, u, s, t)$
$f : E \to \mathbb{R}$, $f \leftarrow 0$
Construir N^f.
mientras *Existe camino aumentante en* N^f **hacer**
 Elegir cualquier camino aumentante P.
 $f \leftarrow f + \chi^P \mathsf{cap}^f(P)$.
 Recalcular N^f.
fin
devolver f.

Si Ford-Fulkerson termina entonces devuelve un flujo máximo.

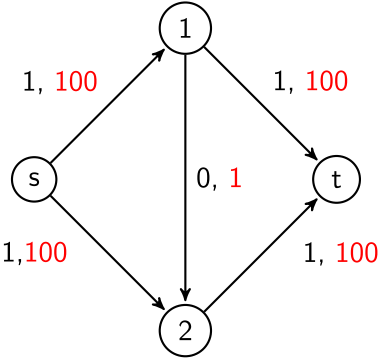
Ejemplo (2)



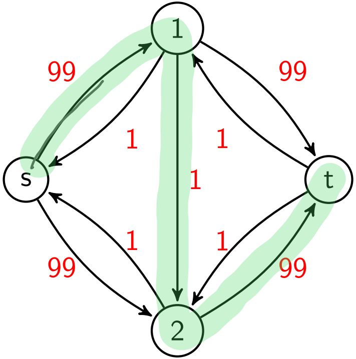
N $\qquad$ N^f (solo capacidades positivas)

Ejemplo (3)

valor (2)



N



N^f (solo capacidades positivas)

1. Capacidades enteras: el algoritmo termina en $O(\mathrm{OPT})$ iteraciones. Luego es un algoritmo de complejidad $O(\underline{(n+m)\mathrm{OPT}})$.
2. Capacidades enteras: el algoritmo no es polinomial.
3. Capacidades racionales: termina (basta amplificar datos)
4. Capacidades irracionales: FF puede no terminar
5. Problema mayor:
   no converge

$f_1 \to f_2 \to f_3 \to \ldots \quad \to f_n \to \ldots$

valor(f_k) converge a $\alpha^* < \mathrm{OPT}$

Edmonds y Karp propusieron (1972) dos variantes de Ford-Fulkerson que son polinomiales para datos enteros.

1. EK1: Aumentar por el camino aumentante de mayor capacidad residual
2. EK2: Aumentar por el camino aumentante de menor número de arcos.

Veremos ambos algoritmos.

polinomial
iteraciones
dependerá
de los #s
escritos

fuertemente
polinomiales.