# Clase 22 MA3705. 11 de diciembre 2020.

## Tabla

- Flujos residuales.
- Flujo-Máximo Corte-Mínimo
- Ford-Fulkerson
- Descomposición de Flujo

# Flujos residuales

# Recuerdo

**Red $N = (G, u, s, t)$**

$G = (V, E)$, $u \colon E \to \mathbb{R}_+$, $s, t \in V$

**$s$-$t$ flujo $f \colon E \to \mathbb{R}$**

Conservación $\forall v \in V - s - t$

$f^{\text{out}}(v) = f(\delta^+(v)) - f(\delta^-(v)) = 0$

Flujo factible: $0 \leq f \leq u$
valor$(f) = f^{\text{out}}(s) = f^{\text{in}}(t)$.

**$\forall s$-$t$ corte $X$, $f$ flujo factible.**

$f^{\text{out}}(X) = \text{valor}(f) \leq \text{cap}(X)$

# Una observación importante

Llamemos $\mathrm{OPT}$ al valor de un $s$-$t$ flujo máximo en $N = (G, u, s, t)$.
$\mathrm{OPT} > 0$ si y solo si existe $s$-$t$ camino $P$ de capacidad

$$\mathsf{cap}(P) = \min_{e \in P} u_e > 0$$

# Una observación importante

Llamemos $\mathrm{OPT}$ al valor de un $s$-$t$ flujo máximo en $N = (G, u, s, t)$.
$\mathrm{OPT} > 0$ si y solo si existe $s$-$t$ camino $P$ de capacidad

$$\text{cap}(P) = \min_{e \in P} u_e > 0$$

Demostración:

1. Si existe $s$-$t$ camino $P$ de capacidad positiva, entonces

   $$\mathrm{OPT} >$$

2. Si no existe tal camino, sea $E_+ = \{e \in E : u_e > 0\}$,
   $X = \{v \in V : v \text{ es alcanzable desde } s \text{ en } E_+\}$

# Red Residual de un flujo factible $f$ en $N = (G, u, s, t)$

### Red residual $N^f = (G^f, u^f, s, t)$

A cada arco $e$ de $G$ se le agrega un reverso $\overleftarrow{e}$ por el cual se puede *devolver flujo*.

$G^f = (V, E \cup \overleftarrow{E})$. $\quad \overleftarrow{E} = \{\overleftarrow{e} : e \in E\}$
$\forall e \in E : \; u^f(e) = u(e) - f(e)$
$\forall e \in E : u^f(\overleftarrow{e}) = f(e)$

### Flujos residuales y normalizaciones

Para $g \colon E \cup \overleftarrow{E} \to \mathbb{R}$, (no necesariamente flujo) en $N^f$ se define su normalización $\bar{g} \colon E \to \mathbb{R}$ como $\bar{g}(e) = g(e) - g(\overleftarrow{e})$.

$\forall v \in V : g^{\text{out}}(v) = \bar{g}^{\text{out}}(v)$.
Luego $g$ es flujo en $G^f$ ssi $\bar{g}$ es flujo en $G$.

# Propiedades de flujos residuales

Sean $f$ flujo factible en $N$. $g$ flujo factible en $N^f$

1. $\bar{g}$ es flujo en $N$.
2. $f + \bar{g}$ es flujo factible en $N$.
3. $\text{valor}(f + \bar{g}) = \text{valor}(f) + \text{valor}_{N^f}(g)$.

# Propiedades de flujos residuales (2)

**Sean $f$, $f'$ flujos factibles en $N$**

Definimos $g$ en $N^f$ como sigue. Para todo $e \in E$:

$$(f(e) \leq f'(e)) \implies g(e) = f'(e) - f(e), \quad g(\overleftarrow{e}) = 0$$

$$(f(e) > f'(e)) \implies g(e) = 0, \quad g(\overleftarrow{e}) = f(e) - f'(e)$$

1. $g$ es flujo factible en $N^f$
2. $f' = f + \bar{g}$
3. valor$(g)$ = valor$(f')$ − valor$(f)$

# Consecuencias

Sea $f$ un $s$-$t$ flujo factible en $N$, $\mathrm{OPT}$ valor de un flujo máximo

1. $f$ es máximo $\iff$ el único flujo factible en $N^f$ es $g \equiv 0$
   $\iff$ no existe $s$-$t$ camino con capacidad residual positiva en $N^f$.
2. $f$ no es máximo $\iff$ existe flujo factible en $N^f$ de valor $\mathrm{OPT} - \text{valor}(f)$

Llamamos camino aumentante a cualquier $s$-$t$ camino $P$ en $N^f$ con capacidad $\text{cap}^f(P) = \min_{e \in E} u^f(e) > 0$.

# Consecuencias

Sea $f$ un $s$-$t$ flujo factible en $N$, $\mathrm{OPT}$ valor de un flujo máximo

1. $f$ es máximo $\iff$ no existe camino aumentante.
2. $f$ no es máximo $\iff$ existe flujo factible en $N^f$ de valor $\mathrm{OPT} -$ valor$(f)$

# Flujo máximo, corte mínimo

# Teorema

**Sea $N$ una red**

$\max\{\text{valor}(f) : f \; s\text{-}t \text{ flujo factible}\} = \min\{\text{cap}(X) : \; X, \; s\text{-}t \text{ corte}\}$

Demostración:

1. Existe flujo máximo (solución óptima de un PL).
2. Sea $f$ flujo máximo. No hay camino aumentante en $N^f$.
3. Sea $X =$

# Ford-Fulkerson

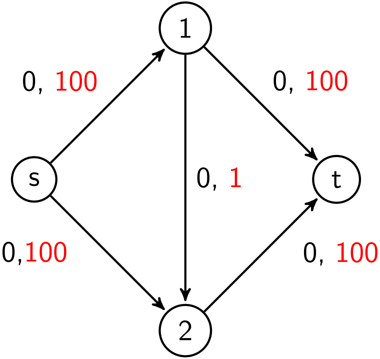
# Algoritmo de Ford-Fulkerson (no polinomial)

**Ford, Fulkerson (1956)**

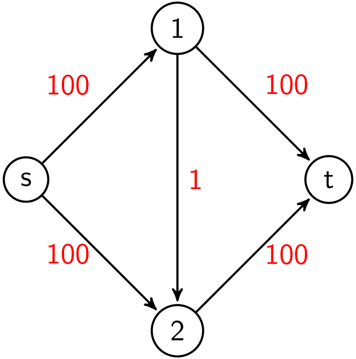
**Entrada:** Red $N = (G, u, s, t)$
$f\colon E \to \mathbb{R}$, $f \leftarrow 0$
Construir $N^f$.
**mientras** *Existe camino aumentante en* $N^f$ **hacer**
    Elegir cualquier camino aumentante $P$.
    $f \leftarrow f + \chi^P \overline{\mathrm{cap}^f(P)}$.
    Recalcular $N^f$.
**fin**
**devolver** $f$.

Si Ford-Fulkerson termina entonces devuelve un flujo máximo.

# Ejemplo

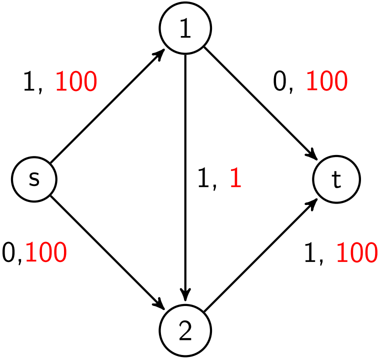



$N$

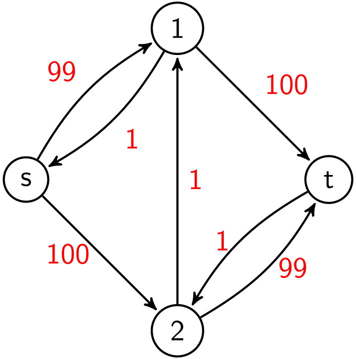



$N^f$ (solo capacidades positivas)

# Ejemplo (2)

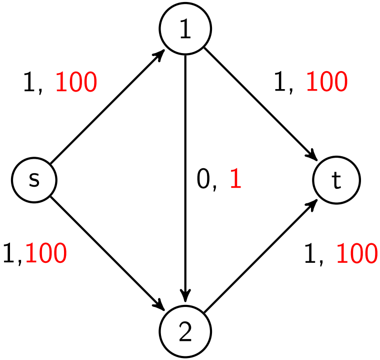



$N$

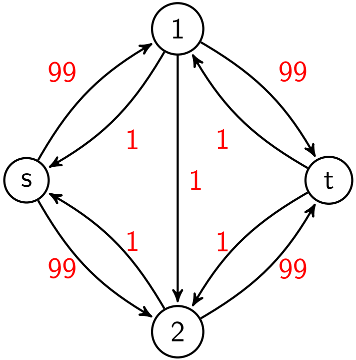



$N^f$ (solo capacidades positivas)

# Ejemplo (3)

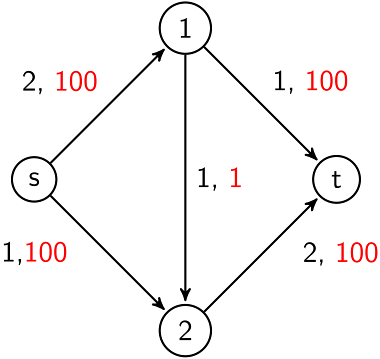



$N$

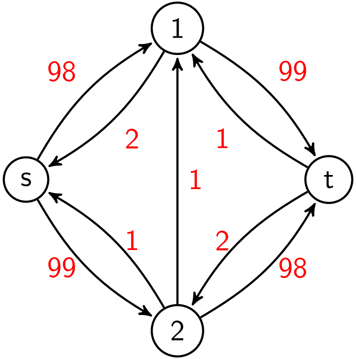



$N^f$ (solo capacidades positivas)

# Ejemplo (4)




$N$




$N^f$ (solo capacidades positivas)

# Problemas de Ford-Fulkerson

1. Capacidades enteras: el algoritmo termina en $O(\mathrm{OPT})$ iteraciones. Luego es un algoritmo de complejidad $O((n+m)\mathrm{OPT})$.
2. Capacidades enteras: el algoritmo no es polinomial.
3. Capacidades racionales:
4. Capacidades irracionales:
5. Problema mayor:

# Algoritmos de Edmonds-Karp

Edmonds y Karp propusieron (1972) dos variantes de Ford-Fulkerson que son polinomiales para datos enteros.

1. EK1: Aumentar por el camino aumentante de mayor capacidad residual
2. EK2: Aumentar por el camino aumentante de menor número de arcos.

Veremos ambos algoritmos.

## Descomposición de Flujo

# Teorema de descomposición de flujo

$f \geq 0$ un $s$-$t$ flujo en $G$. $\mathcal{P}_{s,t}$: $s$-$t$ caminos. $\mathcal{P}_{t,s}$: $t$-$s$ caminos. $\mathcal{C}$: ciclos.

**Teorema: existen constantes $\lambda \geq 0$ tal que:**

valor$(f) = 0$ entonces $f = \displaystyle\sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C$.

valor$(f) > 0$ entonces $f = \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}_{s,t}} \lambda_P \chi^P + \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C$.

valor$(f) < 0$ entonces $f = \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}_{t,s}} \lambda_P \chi^P + \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C$.

El número total de coeficientes no nulos es a lo más $|E|$

Demostración: Inducción en $|E|$. Sea

- Si existe ciclo $C$. Sea $\lambda_C = \min_{e \in C} f(e) = f(e^*)$ entonces $f' = f - \lambda_C \chi^C$ es $s$-$t$ flujo no negativo en $G - e$ de igual valor.
- Luego suponemos acíclico.

# Teorema de descomposición de flujo

- Si valor$(f) > 0$, sea $X = \{v\text{: alcanzables desde } s \text{ con arcos}\}$
- Si $t \notin S$, entonces
- Luego $t \in S$ y existe $s$-$t$ camino $P$.
- Casi valor$(f) < 0$ análogo.

# Corolario importante

Sea $f$ es un $s$-$t$ flujo factible en $N$ (en particular $f \geq 0$) con valor$(f) > 0$.
El teorema de descomposición de flujo garantiza que

$$f = \sum_{P \in \mathcal{P}_{s,t}} \lambda_P \chi^P + \sum_{C \in \mathcal{C}} \lambda_C \chi^C,$$

con todos los $\lambda \geq 0$ y a lo más $m$ términos no nulos.

Luego, existe un $s$-$t$ camino en $N$ con $\min_{e \in P} f_e \geq$

# Edmond-Karp 1: Caminos de mayor capacidad

# Algoritmo de Edmonds-Karp de mayor capacidad

## Edmonds, Karp (1972)

**Entrada:** Red $N = (G, u, s, t)$ con capacidades enteras
$f\colon E \to \mathbb{R}$, $f \leftarrow 0$
Construir $N^f$.
**mientras** *Existe camino aumentante* $P$ *en* $N^f$ **hacer**
  Elegir $P$ de mayor capacidad residual.
  $f \leftarrow f + \chi^P \mathsf{cap}^f(P)$.
  Recalcular $N^f$.
**fin**
**devolver** $f$.

## Teorema

EK1 termina en $O(m \log \mathrm{OPT})$ iteraciones.

# Edmonds Karp de mayor capacidad