MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Luis Fuentes y Javier Santidrián Salas.
Fecha: 30 de noviembre de 2020.

Cátedra 20

1. Repaso

1.1. Intercambio de una matroide

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide e $I \in \mathcal{I}$ un independiente. Definimos el **Grafo de intercambio de I en $\mathcal{M}$** como el grafo $G_I(\mathcal{M}) = (S, E_I)$ bipartito con partes I, $S \setminus I$ que cumple que:

$$e = xy \in E_I \ \ (x \in I, y \in S \backslash I) \iff I \Delta V(e) \in \mathcal{I} \iff I + y - x \in \mathcal{I}$$

Teorema: Sea N matching en $G_I(\mathcal{M})$. Si N es el único matching perfecto entre sus extremos $V(N)$, entonces $I \Delta V(N) \in \mathcal{I}$. Donde $V(N)$ son los vértices extremos del matching.

1.2. Intercambio de dos matroides

Sean $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ matroides con $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.
Definimos el **Digrafo de intercambios de I en $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$** como el digrafo $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = (S, A_I)$, donde A_I es el conjunto de arcos, correspondiente a la unión de:

- $G_I(\mathcal{M}_1)$ orientado de I a $S \setminus I$.
- $G_I(\mathcal{M}_2)$ orientado de $S \setminus I$ a I.

El cuál cumple que si $x \in I$, $y \in S \backslash I$ entonces:

$$xy \in A_I \iff I + y - x \in \mathcal{I}_1$$
$$yx \in A_I \iff I + y - x \in \mathcal{I}_2$$

Gracias a lo anterior, podemos definir los **Conjuntos especiales** como:

$$X_1 = \{y \in S \backslash I : I + y \in \mathcal{I}_1\}$$
$$X_2 = \{y \in S \backslash I : I + y \in \mathcal{I}_2\}$$

Y podemos observar que si $e \in X_1 \cap X_2$, entonces $I + e \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$. Sin embargo, esto es algo muy poco frecuente, pues en general X_1 y X_2 son disjuntos.

1.3. Dualidad débil

Sean $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ matroides.
Si $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, $T \subseteq S$ cualquiera, entonces $|I| \leq r_1(T) + r_2(S \backslash T)$.
Dem: Sea I independiente, luego tenemos las siguiente desigualdades:

$$I \cap T \subseteq T \Rightarrow |I \cap T| \leq r_1(T)$$
$$I \backslash T \subseteq S \backslash T \Rightarrow |I \backslash T| \leq r_2(S \backslash T)$$

Luego, juntando ambas desigualdades tenemos que:

$$|I \cap T| + |I \backslash T| \leq r_1(T) + r_2(S \backslash T)$$

Pero $(I \cap T) \cup (I \backslash T) = I$, por lo que $|I \cap T| + |I \backslash T| = |I|$, así:

$$|I| \leq r_1(T) + r_2(S \backslash T)$$

Por lo que queda entonces demostrado. Luego, si $|I| = r_1(T) + r_2(S \backslash T)$ entonces I es conjunto independiente máximo de $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

2. Algoritmo/Teorema de Intersección de matroides

2.1. Algoritmo de Intersección de Matroides (Aigner-Dowling/Lawler 1975)

Corresponde a un algoritmo de los $70'$. Basicamente necesita tener oráculos en ambas matroides porque hay que ser capaces de determinar independendica de forma rápida.
El algoritmo comienza con $I = \emptyset$ el independiente de ambas matroides y la idea es en cada paso ir aumentando I, es decir, en cada paso encontrar un nuevo I que contenga un elemento más que el anterior. A diferencia de *Glotón*, este I no va a ser una cadena de conjuntos, sino que se realizará intercambio, parecido a *caminos aumentantes*, algunos elementos salen de I y entran otros.
Una vez que estamos en I, calculamos el Digrafo $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, junto con los conjuntos especiales X_1 y X_2.
La idea es preguntarnos si es posible ir desde algún elemento de X_1 a X_2. Si es posible, vamos a buscar P el camino más corto que vaya de X_1 a X_2. Una vez encontrado P, lo que dice el algoritmo es tome I e intercambie los elementos $V(P)$. Luego como P es de largo impar, entonces I aumenta en 1. Lo anterior se repite la cantidad de veces que sea posible.
Eventualmente, llegaremos a un momento en que sea imposible encontrar una forma de ir de X_1 a X_2, entonces calcularemos el conjunto $T = \{v \in S : \exists v - X_2 \text{ camino}\}$ y devolvaremos (I, T).
Este T será nuestro certificado de maximalidad, y será el T de rango correcto, es decir, el que cumple la dualidad débil.
El algoritmo descrito anteriormente, se expresa en pseudocódigo como:

ALG. INTER. DE MATROIDES
(AIGNER-DOWLING / LAWLER 1975)

Entrada: Oráculos para $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$
$I \leftarrow \emptyset$.
Repetir
  Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$
  $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_1\}$
  $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_2\}$
  si $\exists X_1$-X_2 *camino* **entonces**
    Encontrar X_1-X_2 camino más corto P
    $I \leftarrow I \Delta V(P)$
  en otro caso
    $T \leftarrow \{v \in S \colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$
    devolver (I, T)
  fin

Hay que calcular T, ¿Cómo podemos hacerlo? Podemos usar directamente BFS. Con esto, el algoritmo anterior es simple y rápido en comparación a otros, a pesar de que su análisis sea complejo. Lo único que falta es comprobar la correctitud. Para lograr lo anterior demostraremos los siguientes teoremas.

2.2. Teorema 1

Teorema: Si P es $X_1 - X_2$ camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, entonces $I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.
Dem. La clase pasada probamos que $I\Delta V(P)$ basta ver que eso está en $\mathcal{I}_1$, es decir, basta probar que $J = I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$.
En primer lugar definiremos la siguiente matroide:

$$\mathcal{M}_1' = (S + z, \mathcal{I}_1' = \mathcal{I}_1 \cup \{W + z : W \in \mathcal{I}_1\}) = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{U}(\{z\}, 1)$$

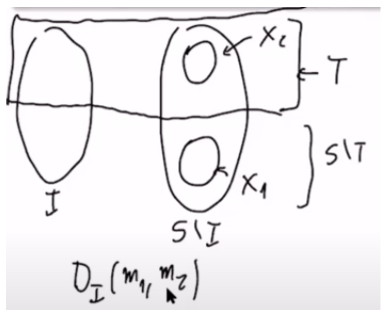
La cual es muy parecida a la matroide original $\mathcal{M}_1$ sólo que con un elemento extra agregado z. Esta nueva matroide presenta los mismos independientes de la matroide original, más todos los independientes que nacen de agregar z. Además, $\mathcal{M}_1'$ corresponde a la suma directa de la matroide original con una matroide *uniforme* de rango 1 (todos los conjuntos de tamaño 1 son independientes), que presenta como único elemento a $\{z\}$.
Notemos que $xy \in \mathcal{M}_1' \iff (I + z) + y - x \in \mathcal{I}_1'$. Pero tenemos que:

$$(I + z) + y - x \in \mathcal{I}_1' \iff (I + y - x) + z \in \mathcal{I}_1' \iff I + y - x \in \mathcal{I}_1$$

Dicho eso, tenemos ahora que en el grafo $G_{I+z}(\mathcal{M}_1')$ ocurre un matching N. ¿Por qué este matching es tal que es el único matching perfecto entre sus extremos? Si hubiera otro matching, al tomar diferencia simétrica entre ambos, por obligación debe existir un ciclo. Y ese ciclo debe conectar a un vértice x con un vértice y de grado más grande. Luego el camino P que es considerado minimal, ya no sería minimal, pues existen *atajos* graicas esta arista que existe. Por lo tanto, para evitar esto, N es el único matching perfecto que existe.
¿Cuál es la conclusión? Del teorema con el que comenzamos, si tomamos $\mathcal{I} + z\Delta V(N) \in \mathcal{I}_1' \iff I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_1' \iff I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$. Demostrando lo que queríamos.
Y por consiguiente, demostramos el Teorema.

2.3. Teorema 2

Teorema: Si no hay $X_1 - X_2$ camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ y $T = \{v \in S : \exists v - X_2 \text{ camino}\}$ entonces $|I| = r_1(T) + r_2(S \setminus T)$.
Dem.



Notar primero que $X_2 \subseteq T$ y que $X_1 \subseteq S \setminus T$. Para demostrar lo pedido, basta probar que $r_1(T) = |I \cap T|$ y que $r_2(S \setminus T) = |I \setminus T|$ (pues $|I| = |I \cap T| + |I \setminus T|$). Notar que $r_1(T) \geq r_1(I \cap T) = |I \cap T|$, pues $I \cap T \in \mathcal{I}_1$ ($I \in \mathcal{I}_1$). Si $r_1(T) > |I \cap T|$, entonces existe $e \in T \setminus I$ tal que $I \cap T + e \in \mathcal{I}_1$. Si aumentamos este nuevo conjunto a $J \in \mathcal{I}_1$, con $|J| = |I|$ (notar que $J \subseteq I + e$), entonces necesariamente $J = I + e - f$, con $f \in I \setminus T$. Luego $(f, e) \in A_I$, pero $e \in T$, luego $f \in T$, lo que es una contradicción ($f \notin T$). Esto concluye que $r_1(T) = |I \cap T|$. Queda propuesto ver que $r_2(S \setminus T) = |I \setminus T|$ (análogo a lo anterior pero con la matroide $\mathcal{M}_2$).

2.4. Complejidad del Algoritmo

El algoritmo entrega un conjunto independiente común de tamaño máximo en tiempo $O(n^3)$ (trabajo + oráculos), pues cada una de las iteraciones se hace en $O(n^2)$ y hay a lo más n iteraciones.

Comentario: Existen algoritmos polinomiales que calculan independientes comúnes de peso máximo.

2.5. Consecuencias del Teorema de Intersección de Matroides (TIM)

Teorema (TIM):
$$max\{|I| : I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = min\{r_1(T) + r_2(S \setminus T) : T \subseteq S\}$$

- Vimos que TIM implica Teorema de König en grafos bipartitos
- Otra consecuencia: Sean $(S, \mathcal{I}_1, (S, \mathcal{I}_2$ dos matroides. Entonces para todo $X \subseteq S$:

$$max\{|I| : I \subseteq X, I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = min\{r_1(T) + r_2(X \setminus T) : T \subseteq X\}$$

2.6. Matroide Imagen

Sea $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$ una matroide, $f : X \to Y$ una función sobreyectiva. Definimos la matroide imagen de f como $\mathcal{M}_f = (Y, \mathcal{I}_f = \{f(I) : I \in \mathcal{I}\})$. Es decir, $J \in \mathcal{M}_f$ ssi existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $f(I) = J$.

Teorema

- $\mathcal{M}_f$ es matroide.
- Si r, r_f son las funciones de rango de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_f$ entonces $r_f(Q) = min_{Z \subseteq Q} r(f^{-1}(Z)) + |Q \setminus Z|$.