Clase 20 MA3705. 30 de noviembre 2020.

Tabla

- Intersección de matroides.

Intersección de Matroides.

Repaso: Intercambio de una matroide

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide e $I \in \mathcal{I}$ un independiente.

Grafo de intercambios de I en $\mathcal{M}$

$G_I(\mathcal{M}) = (S, E_I)$ bipartito con partes I, $S \setminus I$:
$xy \in E_I$ $(x \in I, y \in S \setminus I)$ si y solo si $I + y - x \in \mathcal{I}$.

Teorema: Sea N matching en $G_I(\mathcal{M})$

Si N es el único matching perfecto entre sus extremos $V(N)$.
Entonces $I \Delta V(M) \in \mathcal{I}$.

Repaso: Intercambio de dos matroides

Sean $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ matroides con $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Digrafo de intercambios de I en $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$

$D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) = (S, A_I)$ es la unión de:
$G_I(\mathcal{M}_1)$ orientado de I a $S \setminus I$,
$G_I(\mathcal{M}_2)$ orientado de $S \setminus I$ a I.

Si $x \in I, y \in S \setminus I$:
$xy \in A_I \iff I + y - x \in \mathcal{I}_1$
$yx \in A_I \iff I + y - x \in \mathcal{I}_2$.

Conjuntos especiales

$X_1 = \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_1\}$
$X_2 = \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_2\}$

Repaso: Dualidad débil

Sean $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ matroides.

Dualidad débil

Si $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, $T \subseteq S$ cualquiera, entonces $\qquad |I| \leq r_1(T) + r_2(S \setminus T)$.

Luego, si $|I| = r_1(T) + r_2(S \setminus T)$ entonces $\qquad I$ es ...

Algoritmo/Teorema de Intersección de matroides

Alg. Inter. de Matroides (Aigner-Dowling / Lawler 1975)

Entrada: Oráculos para $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$
$I \leftarrow \emptyset$.
Repetir
  Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$
  $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_1\}$
  $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_2\}$
  si $\exists X_1$-X_2 *camino* **entonces**
    Encontrar X_1-X_2 camino más corto P
    $I \leftarrow I \Delta V(P)$
  en otro caso
    $T \leftarrow \{v \in S \colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$
    devolver (I, T)
  fin

Algoritmo/Teorema de Intersección de matroides

Alg. Inter. de Matroides (Aigner-Dowling / Lawler 1975)

Entrada: Oráculos para $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$
$I \leftarrow \emptyset$.
Repetir
  Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$
  $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_1\}$
  $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_2\}$
  si $\exists X_1$-X_2 *camino* **entonces**
    Encontrar X_1-X_2 camino más corto P
    $I \leftarrow I \Delta V(P)$
  en otro caso
    $T \leftarrow \{v \in S \colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$
    devolver (I, T)
  fin

Probemos 2 teoremas:

Teorema 1

Si P es X_1-X_2 camino más corto entonces $I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ (Ojo: $|I \Delta V(P)| = |I| + 1$.)

Teorema 2

Si no hay X_1-X_2 camino más corto entonces para el (I, T) devuelto: $|I| = r_1(T) + r_2(S \setminus T)$.

Teo 1 + Teo 2 implican:

Teorema 1

Teorema: Si P es X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, entonces $I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Clase pasada: Basta probar que $J = I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$.

Teorema 1

Teorema: Si P es X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, entonces $I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Clase pasada: Basta probar que $J = I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$.

$\mathcal{M}_1' = (S + z, \mathcal{I}_1' = \mathcal{I}_1 \cup \{W + z \colon W \in \mathcal{I}_1\}) = \mathcal{M} \oplus \mathcal{U}(\{z\}, 1)$.

$D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ $\quad$ $G_I(\mathcal{M}_1)$ $\quad$ $G_{I+z}(\mathcal{M}_1')$

Teorema 2

Teorema: Si no hay X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ y $T = \{v \in S \colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$ entonces $|I| = r_1(T) + r_2(S \setminus T)$

Teorema 2

Teorema: Si no hay X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ y $T = \{v \in S\colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$ entonces $|I| = r_1(T) + r_2(S \setminus T)$

Algoritmo/Teorema de Intersección de matroides

Alg. Inter. de Matroides (Aigner-Dowling / Lawler 1975)

Entrada: Oráculos para $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$
$I \leftarrow \emptyset$.
Repetir
  Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$
  $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_1\}$
  $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_2\}$
  si $\exists X_1$-X_2 *camino* **entonces**
    Encontrar X_1-X_2 camino más corto P
    $I \leftarrow I \Delta V(P)$
  en otro caso
    $T \leftarrow \{v \in S \colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$
    devolver (I, T)
  fin

El algoritmo entrega un conjunto independiente común en tiempo $O(n^3)$ (trabajo + oráculos).

Comentario: Existen algoritmos polinomiales que calculan independientes comunes de peso máximo.

Teorema de Intersección de Matroides

$$\max\{|I| \colon I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{r_1(T) + r_2(S \setminus T) \colon T \subseteq S\}$$

Teorema de Intersección de Matroides (TIM)

$\text{máx}\{|I| \colon I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \text{mín}\{r_1(T) + r_2(S \setminus T) \colon T \subseteq S\}$

Vimos TIM $\implies$ Teorema de König en grafos bipartitos.

Otra consecuencia:
Sean $(S, \mathcal{I}_1)$, $(S, \mathcal{I}_2)$ dos matroides. Entonces para todo $X \subseteq S$:

$\text{máx}\{|I| \colon I \subseteq X, I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} =$

Matroide Imagen

Sea $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$ una matroide
$f \colon X \to Y$ una función sobreyectiva.
Definimos matroide imagen de f: $\mathcal{M}_f = (Y, \{f(I) \colon I \in \mathcal{I}\})$

Teorema

- $\mathcal{M}_f$ es matroide
- Si r, r_f son las funciones de rango de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_f$ entonces $r_f(Q) = \min_{Z \subseteq Q} r(f^{-}(Z)) + |Q \setminus Z|$

$\mathcal{M}_f$ es matroide

$\mathcal{M}_f = (Y, \{f(I) \colon I \in \mathcal{I}\})$, con $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, $f \colon X \to Y$ sobreyectiva.

(*) $J \in \mathcal{I}_f \iff \exists I \in \mathcal{I}, f(I) = J, |I| = |J|$

$\mathcal{M}_f = (Y, \{f(I) \colon I \in \mathcal{I}\})$. $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, $f \colon X \to Y$ sobre.

(*) $J \in \mathcal{I}_f \iff \exists I \in \mathcal{I}, f(I) = J, |I| = |J|$

$\mathcal{M}_f = (Y, \{f(I) \colon I \in \mathcal{I}\})$. $\mathcal{M} = (X, \mathcal{I})$, $f \colon X \to Y$ sobre.

(*) $J \in \mathcal{I}_f \iff \exists I \in \mathcal{I}, f(I) = J, |I| = |J|$

Nueva matroide de partición en X

$\mathcal{P} = (X, \{I \subseteq X \colon |f^{-1}(y) \cap I| \leq 1, \forall y \in Y\})$
$r_P(Z) =$

PDQ para todo $Q \subseteq Y$ $\qquad r_f(Q) = \mathrm{mín}_{Z \subseteq Q}\, r(f^{-1}(Z)) + |Q \setminus Z|$