Clase 19 MA3705. 20 de noviembre 2020.

Tabla

- Intersección de matroides.

Intersección de Matroides.

Grafo de intercambio de una matroide

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide e $I \in \mathcal{I}$ un independiente.

Grafo de intercambios de I en $\mathcal{M}$

$G_I(\mathcal{M}) = (S, E_I)$ bipartito con partes I, $S \setminus I$:
$xy \in E_I$ $(x \in I, y \in S \setminus I)$ si y solo si $I + y - x \in \mathcal{I}$.

Teorema: Si $J \subseteq S$, $|J| = |I|$.

1. $J \in \mathcal{I} \implies \exists$ matching perfecto $I \setminus J : J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M})$.
2. Existe único matching perfecto $I \setminus J : J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M}) \implies J \in \mathcal{I}$.

Corolario: Intercambio fuerte de bases

Sean A y B son bases de una matroide. Existe biyección $\varphi \colon A \to B$ tal que $\forall a \in A$, $A + \varphi(a) - a$ es base.

Teoremas de grafo de intercambio

Teorema (1): Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide, $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq S$, $|J| = |I|$.

$J \in \mathcal{I} \implies$ existe matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M})$.

Dem: Si $H = G_I(\mathcal{M})[I \setminus J \cup J \setminus I]$ no tiene matching perfecto...

Teoremas de grafo de intercambio

Teorema (2): Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide, $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq S$, $|J| = |I|$.

Único matching perfecto N entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M}) \implies J \in \mathcal{I}$

Dem: Orientemos N en $G_I(\mathcal{M})$ hacia I, el resto hacia $S \setminus I$. ¿Ciclos?

Conclusión:

Si se encuentra matching N en $G_I(\mathcal{M})$ tal que N es el único matching perfecto de sus extremos, entonces podemos intercambiar los extremos manteniendo independencia (camino de intercambio).

Llamémos a N matching de intercambio.
¿Cómo hacer algo similar en dos matroides $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$?

Idea: Usar caminos que **alternen** entre un matching de $G_I(\mathcal{M}_1)$ y un matching $G_I(\mathcal{M}_2)$.

Conclusión:

Si se encuentra matching N en $G_I(\mathcal{M})$ tal que N es el único matching perfecto de sus extremos, entonces podemos intercambiar los extremos manteniendo independencia (camino de intercambio).

Llamémos a N matching de intercambio.
¿Cómo hacer algo similar en dos matroides $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$, $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$?

Idea: Usar caminos que **alternen** entre un matching de $G_I(\mathcal{M}_1)$ y un matching $G_I(\mathcal{M}_2)$.

Digrafo de intercambios de 2 matroides

$D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ es la superposición de
$G_I(\mathcal{M}_1)$ orientado de I a $S \setminus I$.
$G_I(\mathcal{M}_2)$ orientado de $S \setminus I$ a I.

Antes de ver el algoritmo... dos conjuntos especiales

Sea $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, con $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1); \mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ matroides.

$X_1 = \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_1\}, \quad X_2 = \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_2\}$

¿Qué pasa si $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$?

Algoritmo/Teorema de Intersección de matroides

Algoritmo Intersección de Matroides (Aigner-Dowling 1975 / Lawler 1975)

Entrada: Oraculos para $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1), \mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$
$I \leftarrow \emptyset$.
Repetir
- Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$
- $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_1\}$
- $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I \colon I + y \in \mathcal{I}_2\}$
- **si** $\exists X_1$-X_2 *camino* **entonces**
  - Encontrar X_1-X_2 camino más corto P
  - $I \leftarrow I \Delta V(P)$
- **en otro caso**
  - $T \leftarrow \{v \in S \colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$
  - **devolver** (I, T)
- **fin**

Aumento: $|I \Delta V(P)| = |I| + 1$

Teorema: Si P es X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, entonces $I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Basta probar que $J = I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$ (el argumento es simétrico pues P reverso es X_2-X_1 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1)$).

Aumento: $|I\Delta V(P)| = |I| + 1$

Teorema: Si P es X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, entonces $I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Basta probar que $J = I\Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$ (el argumento es simétrico pues P reverso es X_2-X_1 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_2, \mathcal{M}_1)$).

$\mathcal{M}'_1 = (S + z, \mathcal{I}'_1 = \{W \subseteq S \colon W \setminus \{z\} \in \mathcal{I}_1\})$. $I + z$ $\qquad$ $|J| = |I + z|$

Aumento: $|I \Delta V(P)| = |I| + 1$

Teorema: Si P es X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$, entonces $I \Delta V(P) \in \mathcal{I}_1$

$\mathcal{M}_1' = (S + z, \mathcal{I}_1' = \{W \subseteq S \colon W \setminus \{z\} \in \mathcal{I}_1\})$. $I + z$ $|J| = |I + z|$
$\mathcal{M}_2' = (S + z, \mathcal{I}_2' = \{W \subseteq S \colon W \in \mathcal{I}_2\})$.

Algoritmo/Teorema de Intersección de matroides

Algoritmo Intersección de Matroides (Aigner-Dowling 1975 / Lawler 1975)

Entrada: Oraculos para $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1), \mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$
$I \leftarrow \emptyset$.
Repetir
- Construir $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$
- $X_1 \leftarrow \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_1\}$
- $X_2 \leftarrow \{y \in S \setminus I : I + y \in \mathcal{I}_2\}$
- **si** $\exists X_1$-X_2 *camino* **entonces**
  - Encontrar X_1-X_2 camino más corto P
  - $I \leftarrow I \Delta V(P)$
- **en otro caso**
  - $T \leftarrow \{v \in S : \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$
  - **devolver** (I, T)
- **fin**

De lo anterior siempre se tiene: $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Recuerdo: Dualidad débil

$$\max\{|I| : I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} \leq \min\{r_1(T) + r_2(S \setminus T) : T \subseteq S\}$$

Finalización

Teorema: Si no hay X_1-X_2 camino mínimo en $D_I(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$; y $T = \{v \in S \colon \exists v\text{-}X_2 \text{ camino}\}$ entonces $|I| = r_1(T) + r_2(S \setminus T)$

Algoritmo

El algoritmo de intersección de matroide encuentra un independiente común máximo en tiempo polinomial ($O(|S|^3)$ tiempo y llamadas a oráculos).

Teorema de Intersección de matroides

$$\text{máx}\{|I|\colon I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \text{mín}\{r_1(T) + r_2(S \setminus T)\colon T \subseteq S\}$$

Comentarios:

1. Existen algoritmos polinomiales para calcular conjuntos independientes comunes a dos matroides de peso máximo (similares a algoritmo primal-dual para matching)
2. Podemos definir una *unión* de dos matroides como aquella cuyos independientes son todos los $I_1 \cup I_2$ con I_1 independiente en la primera matroide e I_2 independiente en la segunda. Se puede probar que este objeto es una matroide y el teorema de intersección de matroides nos da una fórmula para el rango.