Clase 18 MA3705. 16 de noviembre 2020.

(Internet inestable)

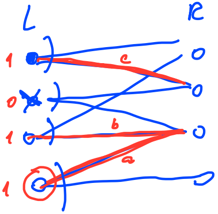
¿ESCRIBAS?

Tabla

- Intersección de matroides.

Intersección de Matroides.

Un enfoque distinto para matching de tamaño máximo en grafos bipartitos



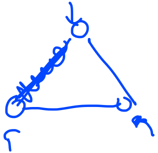
$\{a,b,c\} \in \mathcal{I}_1$

Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito.

- $(E, \mathcal{I}_1)$ es matroide de partición

$$E = \biguplus_{v \in L} \delta(v)$$

$$\mathcal{I}_1 = \{F \subseteq E \colon \forall v \in L, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$$
$$\mathcal{I}_2 = \{F \subseteq E \colon \forall v \in R, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$$



- $(E, \mathcal{I}_2)$ también.

$M \subseteq E$ es matching si y solo si $M \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Encontrar $M \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ con ambas matroides de tamaño máximo. . .

Generalización: Intersección de Matroides

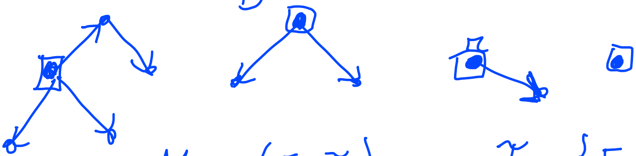
Dadas dos matroides $(S, \mathcal{I}_1)$ y $(S, \mathcal{I}_2)$. El conjunto $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ no es una matroide (en general), pero sigue siendo sistema de independencia.

1. ¿Base de tamaño máximo en $\mathcal{I}$? ✓
2. No podemos usar glotón. ¿Caminos alternantes?
3. ¿Teoremas tipo König?
4. ¿Aplicaciones?

1. Matchings en grafos bipartitos. ✓
2. Branchings.
3. Bosques (o matroides) coloreadas.

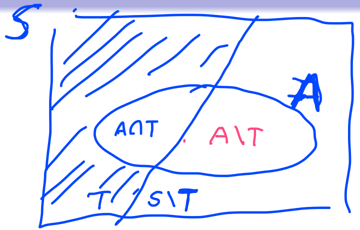
Grafo $G=(V,E)$ y cada arista tiene un color $\in [k]$
Encontrar un bosque $F \subseteq E$ donde cada color aparece ≤ 1 vez en F

Def: Un r-branching de un digrafo $D=(V,E)$, $r \in V$
Es un bosque orientado tal que $\forall v \neq r$. $\deg^-_B(v) \leq 1$
B
$\deg^-_B(r) \leq 0$.



$\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ con $\mathcal{I}_1 = \{F \subseteq E : |\delta^-_E(v) \cap F| \leq 1\}$
$\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroide gráfica de $(V, \bar{E})$
con $\bar{E}$ la versión no dirigida de E.

¿Dualidad débil?



$|A\cap T| \le r_1(T)$

$|A\setminus T| \le r_2(S\setminus T)$ ← indep. en M_2

$A\setminus T \subseteq S\setminus T$

Una matroide: $(S,\mathcal{I})$: $\forall A\in\mathcal{I}$, $|A|\le r(S)$.

Dos matroides: $(S,\mathcal{I}_1),(S,\mathcal{I}_2)$

$\forall A\in\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2, \forall T\subseteq S : |A| = |A\cap T| + |A\setminus T| \le r_1(T) + r_2(S\setminus T)$

$\therefore \forall A\in\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2, \forall T\subseteq S$

$$|A| \le r_1(T) + r_2(S\setminus T)$$

$$\max_{A\in\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2} |A| \le \min_{T\subseteq S} r_1(T) + r_2(S\setminus T)$$

¿k matroides: $(S,\mathcal{I}_i)$?

$$\max_{A\in\bigcap_{i=1}^{k}\mathcal{I}_i} |A| \le \min_{\substack{(T_1,T_2,\dots,T_k)\\ \text{partición de } S}} \sum_{i=1}^{k} r_i(T_i)$$

difíciles NP-difíciles

fáciles P

resolubles en tiempo polinomial.

Existen problemas en optimización combinatorial que son NP-difíciles.
Sospecha fundada para que no existan algoritmos polinomiales.
Ejemplos:

- [Vendedor viajero]/ Ciclo Hamiltoniano — ciclo que pasa por todos los vértices de un grafo $G=(V,E)$
- Camino más largo de un grafo dirigido.
- Intersección de tres matroides (gráficas y partición)

Auxiliar.

+ Fácil: 2 matroides. (existe alg. polinomial).

Teorema de intersección de matroides

Probaremos después el Teorema de Intersección de Matroide

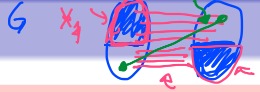
Sean $(S,\mathcal{I}_1),(S,\mathcal{I}_2)$ dos matroides sobre S. Entonces:

r_i = rango en $(S, \mathcal{I}_i)$.

hay igualdad.

$$\text{máx}\{|X|: X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \text{mín}\{T \subseteq S: r_1(T) + r_2(S \setminus T)\}$$

Teorema de intersección de matroides



$|X_1 \cup X_2| = r_1(\delta(X_1)) + r_2(E \setminus \delta(X_1))$

Probaremos después el Teorema de Intersección de Matroide

Sean $(S, \mathcal{I}_1), (S, \mathcal{I}_2)$ dos matroides sobre S. Entonces:

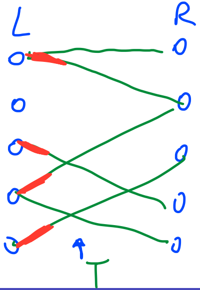
$$\max\{|X| : X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\} = \min\{T \subseteq S : \overbrace{r_1(T) + r_2(S \setminus T)}\}$$

$= \min \{ |X_1 \cup X_2| : X_1 \cup X_2$ cubrimiento, $X_1 \subseteq L$, $X_2 \subseteq R \}$

Generaliza el teorema de König para el caso: $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito.

$\mathcal{I}_1 = \{F \subseteq E : \forall v \in L, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$

$\mathcal{I}_2 = \{F \subseteq E : \forall v \in R, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$, $\boxed{T \subseteq E}$.



$\max\{|X| : X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\}$

$= \max\{|X| : X$ matching$\}$

$r_1(T) = |X_1|$

$r_2(S \setminus T) = |X_2|$

Sea $T \subseteq E$.

(Ej: T a la izq)

→ tq minimiza $\boxed{r_1(T) + r_2(S \setminus T)} = |X_1 \cup X_2|$

X_1 = vértices de L que tocan a T.

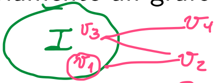
X_2 = vértices de R que tocan a $E \setminus T$

$X_1 \cup X_2$ es cubrimiento

$|X_1 \cup X_2| = r_1(T) + r_2(S \setminus T)$

¿Camino alternante?

Necesitaremos un enfoque distinto ya que ahora no hay necesariamente un grafo detrás de las matroides $(S, \mathcal{I}_1), (S, \mathcal{I}_2)$.
Supongamos $\mathcal{J}$ un sistema de independencia, e $I \in \mathcal{J}$



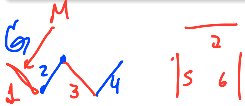
$I \Delta P = I \setminus \{v_1, v_3\} \cup \{v_2, v_4\}$

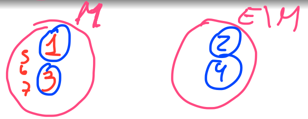
Camino alternante par ✓

Una secuencia $P = v_1 v_2 v_3 \ldots v_k$ de elementos distintos en S, se dice camino I-alternante par si sus elementos impares están en I y los pares en $S \setminus I$.

Camino de intercambio

Un camino I-alternante par P es de intercambio si $I \Delta P \in \mathcal{J}$

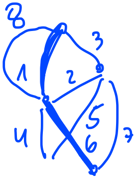




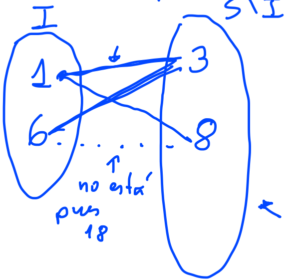
$P = 1\,2\,3\,4$

Antes de analizar 2 matroides entendamos una sola

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide e $I \in \mathcal{I}$ un independiente.
El grafo de intercambios de I es el grafo bipartito $G' = G_I(\mathcal{M})$ con bipartición I, $S \setminus I$ y tal que $xy \in E'$ si y solo si $I + y - x \in \mathcal{I}$.



$\mathcal{M}$



$I + y - x \in \mathcal{I}.$

$163 \in \mathcal{I}$

$\Rightarrow 16 + 3 - 1 = 63$

$16 + 3 - 6 = 13$

$(16) + 8 - 1 \in \mathcal{I}$

$(16) + 8 - 6 \notin \mathcal{I}$

Teoremas de grafo de intercambio

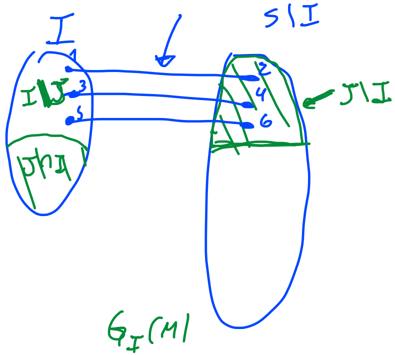
Teorema: Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide, $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq S$, $|J| = |I|$

1. $J \in \mathcal{I} \implies$ existe matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M})$. ✓
2. Existe único matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G_I(\mathcal{M}) \implies J \in \mathcal{I}$.

Dem: (1) Sea $H = G_I(\mathcal{M})[I \setminus J \cup J \setminus I]$

Si no hay tal matching, existe $W \subseteq J \setminus I$:

$\mathcal{M}$



Paremos aquí.