Clase 17 MA3705. 13 de noviembre 2020.

Tabla

- Problema de asignación: matching perfecto de costo mínimo.

Problemas de matching perfecto de costo mínimo.

Tres problemas equivalentes

1. Dado $G = (V, E)$ bipartito $w \colon E \to \mathbb{R}$.
   Encontrar matching M de peso $w(M)$ máximo.

2. Dado $G = (V, E)$ bipartito, $k \in \mathbb{N}$, $w \colon E \to \mathbb{R}$.
   Encontrar matching M con $|M| = k$ y de peso $w(M)$ máximo.

3. (Problema de asignación). Dado $G = (V, E)$ bipartito completo balanceado, $c \colon E \to \mathbb{R}$.
   Encontrar matching perfecto M de peso $c(M)$ mínimo.

Ejercicio presentable: Demostrar que $3 \implies 1$
Ejercicios desafío: Demostrar que $3 \implies 2$.

Problema de asignación como programa lineal entero

Sea $G = (L \cup R; E \equiv L \times R)$ grafo completo bipartito balanceado.
$c \colon E \to \mathbb{R}$ función de costo.

$$\min \sum_{ij \in E} x_{ij} c_{ij}$$

Recuerdo: $\min\{c^T x \colon x \in X\} = \min\{c^T x \colon x \in \operatorname{conv}(X)\}$

Birkhoff Von Neumann + Programación lineal

Optimización lineal + teorema de BVN + dualidad:

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{ij\in E} x_{ij}c_{ij} \quad &= \quad \min \sum_{ij\in E} x_{ij}c_{ij} &= \quad \max \sum_{i\in L} y_i + \sum_{j\in R} z_j \\
\sum_{i\in L} x_{ij} = 1\, \forall j \in R \quad & \qquad \sum_{i\in L} x_{ij} = 1\, \forall j \in R & \\
\sum_{j\in R} x_{ij} = 1\, \forall i \in L \quad & \qquad \sum_{j\in R} x_{ij} = 1\, \forall i \in L & \\
x \in \{0,1\}^E \quad & \qquad x \geq 0 &
\end{aligned}
$$

¡SIMPLEX no es un algoritmo polinomial!
(pero es raro que no logre soluciones rápidas)

En algunos casos, es posible encontrar soluciones de un PL de manera combinatorial:

Algoritmo Primal - Dual.

1. Encontrar solución DUAL d factible inicial
2. Repetir:
   1. Obtener vector p con holgura complementaria respecto a d
   2. Si p es primal factible, ganamos
   3. Si no, usar p para encontrar un mejor d DUAL.

Holgura complementaria en problema de asignación

$$\begin{aligned} \min \sum_{ij\in E} x_{ij}c_{ij} \quad & = \quad \max \sum_{i\in L} y_i + \sum_{j\in R} z_j \\ \sum_{i\in L} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in R \quad & \quad\quad y_i + z_j \leq c_{ij} \\ \sum_{j\in R} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in L & \\ x \geq 0 & \end{aligned}$$

x primal factible & (y, z) dual factible & holgura complementaria $\implies$ óptimo.

Lema

Si (y, z) dual factible, M matching perfecto $M \subseteq E(y, z) = \{ij \in E \colon c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$ entonces M es asignación óptima.

(incompleto) Algoritmo Húngaro primal-dual para problema de asignación

Algoritmo Primal-Dual (Kuhn 1955))

Entrada: $c\colon L \times R \to \mathbb{R}$
(y, z) solución dual-factible inicial.
Repetir
- $M \leftarrow$ matching de tamaño máximo de $E(y,z) = \{ij \in E\colon c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$
- **si** M *perfecto* **entonces devolver** M
- **en otro caso** Encontrar dual-factible $(\tilde{y}, \tilde{z})$ con $y(L) + z(R) < \tilde{y}(L) + \tilde{z}(R)$. $(y, z) \leftarrow (\tilde{y}, \tilde{z})$

$$(D) \max y(L) + z(R)$$
$$y_i + z_j \leq c_{ij} \ \forall ij$$

$C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$ cubre $(V, E(y,z))$

ALGORITMO PRIMAL-DUAL (KUHN 1955))

Entrada: $c\colon L \times R \to \mathbb{R}$
$y \leftarrow 0$, $\forall j \in R, z_j \leftarrow \max\{c_{ij} - y_i : i \in L\}$
Repetir
- $M \leftarrow$ matching de tamaño máximo de $E(y, z) = \{ij \in E\colon c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$
- **si** M *perfecto* **entonces devolver** M
- **en otro caso**
  - $\varepsilon \leftarrow \min\{c_{ij} - y_i - z_j : i \in L \cap Q, j \in R \setminus Q\}$
  - $y \leftarrow y + \varepsilon\chi^{L\cap Q}$
  - $z \leftarrow z - \varepsilon\chi^{R\cap Q}$ (Q =alcanzables)
- **fin**

$$(D)\ \max y(L) + z(R)$$
$$y_i + z_j \leq c_{ij}\ \forall ij$$

$C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$ cubre $(V, E(y, z))$

PDQ:
(1) $\tilde{y}, \tilde{z} = (y + \varepsilon\chi^{L\cap Q}, z - \varepsilon\chi^{R\cap Q})$ es dual factible.
(2) Es de mayor valor que (y, z)

Correctitud

ALGORITMO PRIMAL-DUAL (KUHN 1955))

Entrada: $c\colon L \times R \to \mathbb{R}$
$y \leftarrow 0$, $\forall j \in R, z_j \leftarrow \text{máx}\{c_{ij} - y_i : i \in L\}$
Repetir
  $M \leftarrow$ matching de tamaño máximo de
  $E(y,z) = \{ij \in E\colon c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$
  si M *perfecto* **entonces devolver** M
  en otro caso
    $\varepsilon \leftarrow \text{mín}\{c_{ij} - y_i - z_j : i \in L \cap Q, j \in R \setminus Q\}$
    $y \leftarrow y + \varepsilon\chi^{L\cap Q}$
    $z \leftarrow z - \varepsilon\chi^{R\cap Q}$ ($Q =$alcanzables)
  fin

$$(D)\ \text{máx}\, y(L) + z(R)$$
$$y_i + z_j \leq c_{ij}\ \forall ij$$

$C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$ cubre $(V, E(y,z))$

PDQ:
(1) $\tilde{y}, \tilde{z} = (y + \varepsilon\chi^{L\cap Q}, z - \varepsilon\chi^{R\cap Q})$ es dual factible.
(2) Es de mayor valor que (y,z)

¿Complejidad?

Algoritmo Primal-Dual (Kuhn 1955))

Entrada: $c\colon L \times R \to \mathbb{R}$

$y \leftarrow 0$, $\forall j \in R, z_j \leftarrow \max\{c_{ij} - y_i\colon i \in L\}$

Repetir

$M \leftarrow$ matching de tamaño máximo de $E(y,z) = \{ij \in E\colon c_{ij} - y_i - z_j = 0\}$

si M *perfecto* **entonces devolver** M

en otro caso

$\varepsilon \leftarrow \min\{c_{ij} - y_i - z_j\colon i \in L \cap Q, j \in R \setminus Q\}$

$y \leftarrow y + \varepsilon\chi^{L\cap Q}$

$z \leftarrow z - \varepsilon\chi^{R\cap Q}$ (Q =alcanzables)

fin

Lemas

(1) M no decrece. (2) M puede crecer solo n veces.
(3) Cuando M no crece, Q aumenta

Resumen

El algoritmo húngaro primal-dual encuentra un matching perfecto de costo mínimo en $O(n^2)$ iteraciones, cada una de ellas toma $O(n + |E(y,z)|) = O(n^2)$
En total $O(n^4)$.
Notas: Mejores algoritmos para matching de peso máximo (no nec. completo)

Algoritmo	Complejidad
Kuhn (1955)	$O(n^4)$
Iri (1960)	$O(n^2 m)$
Dinic-Kronrod (1969)	$O(n^3)$
Edmonds-Karp (1970)	$O(nm + n \log n)$

Un enfoque distinto para matching en grafos bipartitos

Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito.

$\mathcal{I}_1 = \{F \subseteq E \colon \forall v \in L, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$
$\mathcal{I}_2 = \{F \subseteq E \colon \forall v \in R, |\delta_E(v) \cap F| \leq 1\}$

$M \subseteq E$ es matching si y solo si $M \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

Generalización: Intersección de Matroides

Dadas dos matroides $(S, \mathcal{I}_1)$ y $(S, \mathcal{I}_2)$. El conjunto $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ no es una matroide (en general).

1. ¿Base de tamaño máximo en $\mathcal{I}$?
2. No podemos usar glotón. ¿Caminos alternantes?
3. ¿Teoremas tipo König?
4. ¿Aplicaciones?

Intersección de Matroides: Ejemplos

1. Matchings en grafos bipartitos (solo funciona en este caso).
2. Branchings.
3. Bosques (o matroides) coloreadas.

¿Dualidad débil?

Una matroide: $(S, \mathcal{I})$: $\forall A \in \mathcal{I}$, $|A| \leq r(S)$.

Dos matroides: $(S, \mathcal{I}_1), (S, \mathcal{I}_2)$
$\forall A \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2, \forall T \subseteq S : |A| = |A \cap T| + |A \setminus T| \leq r_1(A \cap T) + r_2(A \setminus T)$

¿k matroides: $(S, \mathcal{I}_i)$?