MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Canela Orellana, y Fabián Sepúlveda.
Fecha: 6 de Noviembre de 2020 .

Cátedra 15

1. Recordando nociones de Matching y Teorema de König

Dentro de los teoremas que utilizaremos en esta cátedra, será de utilidad recordar el siguiente resultado visto con anterioridad.

Teorema 1. *M es un matching de tamaño máximo sobre un grafo $G = (V, E)$ $\iff$ no existen caminos M-aumentantes.*

El cual se basa en el hecho de que cualquier camino M-aumentante puede ser utilizado para generar un matching de tamaño mayor al original M al generar la diferencia simétrica con este. También debemos recordar la siguiente definición.

Definición 1. Vertex Cover: Definimos C un Vertex Cover (cubrimiento por vértices) como $C \subseteq V$, tal que $\forall e \in E$, $\exists u \in C$, $\exists w \in V$, tal que $e = vw$. i.e. Toda arista queda cubierta por algún vértice en C.

En particular, V es un Vertex Cover. Con esto en mente, recordamos también el teorema de König visto en la clase anterior.

Definición 2. Dualidad débil en grafos generales: $\forall M$ matching, $\forall C$ cubrimiento, $|M| \leq |C|$,

Teorema 2. Teorema de König: *Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito. Entonces $Max\{\ |M| : M$ es Matching en G $\} = Min\{|C| : C$ es Vertex Cover de $G\}$.*

El cual fue demostrado en la clase anterior, del cual se desprendió el siguiente algoritmo (Algoritmo de König, 1931) para encontrar Matchings maximales y Vertex Covers minimales.

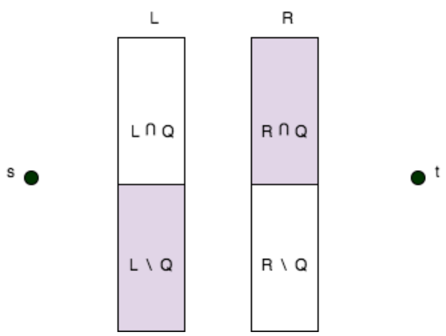
Algorithm 1: Algoritmo de König

Entrada: $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito. # siempre se puede suponer que se tiene la bipartición a mano
$M \leftarrow \emptyset$
while *Existan caminos dirigidos de s hacia t* **do**
    Construir un grafo dirigido $D(G, M)$ y un árbol tipo BFS utilizando nodos auxiliares s (raiz) y t (terminal).
    $Q \leftarrow \{$nodos alcanzables desdes s a $D(G, M)\}$
    if $t \in Q$ **then**
        $M \leftarrow M \triangle P$, con P camino M-aumentante encontrado
    end
    else
        $C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$
    end
end
return (M, C)

La correctitud del algoritmo se probará utilizando el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea Q es el conjunto de nodos alcanzables desdes un nodo raíz s a un grafo generado por un Matching M, G_M. Si M es Matching maximal, entonces $C := (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$ es recubrimiento por vértices de G y $|C| \leq |M|$.*

Dem: Lo primero que queremos ver es que $C := (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$ sea cubrimiento. Usaremos el siguiente diagrama, en el que aparecen ambos lados de la bipartición, separando además qué parte de cada uno intersecta a Q (*nodos alcanzables desde s*). Así, lo que queremos ver, es que todas las aristas en el grafo tocan algún vértice en la zona pintada. Algo importante de mencionar es que usaremos que los arcos del matching estarán orientados hacia la izquierda, mientras que desde s salen hacia la derecha.



Veremos que no existen aristas que tengan un extremo en $L \cap Q$ y el otro en $R \backslash Q$. Sea $e = uv$ con $u \in L \cap Q$, $v \in R \backslash Q$, con lo cual, se tienen 2 posibilidades para e, dependiendo si está o no en el matching:

- si $e \notin M$, en nuestro diagrama, e está dirigido hacia la derecha, lo cual no puede ser, ya que el vértice u es alcanzable desde s, pero v no, lo cual se contradice con la existencia del arco $e = uv$.
- si $e \in M$, el arco e estaría dirigido hacia la izquierda en el diagrama. Un arco que entra a u lo puede hacer desde s o desde R. En el primer caso u es M-cubierto y no existe un arco directo de s hasta u. En el segundo caso el arco es del matching, así, el único arco que llega a u es $e = vu$. Pero v no es alcanzable desde s y por lo tanto tampoco lo puede ser u. Encontramos la contradicción

Así se concluye que todas las aristas del grafo tocan a un vértice en C y por lo tanto, C es cubrimiento.
Ahora veamos que $|C| \leq |M|$, siendo M un matching maximal.
Entonces, se quiere ver que cada vértice de C lo podemos mapear a una única arista de M, que no hay arcos desde $R \cap Q$ hacia $L \setminus Q$. Veamos que los arcos del matching se dividen en 2 tipos:

- Arcos cuya cabeza está en $L \setminus Q$, estos vértices no son alcanzables desde s, por lo cual, todos tocan al matching y los arcos vienen desde $R \setminus Q$. Entonces, todo vértice de $L \setminus Q$ toca **una** arista de M
- Arcos cuya cola está en $R \cap Q$, estos arcos sí son alcanzables desde s, además, dado que t no es alcanzable, ya que M es máximo, no existen arcos que vayan desde $R \cap Q$ a t, por lo cual, todos los vértices en $R \cap Q$ son M-cubiertos y se dirigen a $L \cap Q$. Entonces, todo vértice de $R \cap Q$ toca **una** arista de M

Así, se concluye que cada vértice de C se asocia a una única arista de M.
Y utilizando este teorema, se encuentra la correctitud del algoritmo.

Obs 1: Si M es Matching maximal,entonces se puede encontrar un cubrimiento por vertices minimal en tiempo $O(n+m)$ con el algoritmo anteriormente descrito. Además se puede encontrar tanto un matching máximo como cubrimiento mínimo en G bipartito en tiempo $O(n(n+m))$

Obs 2: Existen actualmente mejores algoritmos de búsqueda (en términos de eficiencia) como el de Hopcroft-Karp (1973) que posee una complejidad $O(\sqrt{n}(n+m))$, e incluso algoritmos estocasticos de busqueda-eliminación, que con alta probabilidad se pueden obtener como Mucha-Sankowsky (2004) con complejidad $O(n^{2.372864})$ mediante una semejanza existente con la multiplicación de matrices, o de Mandr (2011) con alta probabilidad $O(m^{\frac{10}{7}})$ (cuando $m < n^2$).

El siguiente teorema sólo se enunciará y se demostrará la próxima clase, y tiene base en la demostración del teorema de König.

Teorema 4. Teorema de Hall: *Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito y denotamos por $N(X)$ al conjunto de vértices adyacentes al conjunto X. Entonces, $\exists M$ Matching que cubre completamente a $L \iff \forall X \subseteq L$, $|X| \leq |N(X)|$.*

Y un corolario que se puede desprender de este teorema es la siguiente aplicación.

Corolario 1. *Si G es un grafo bipartito, conconjunto de aristas no vacío y regular (todos los vértices poseen el mismo grado), entonces $\exists M$ matching perfecto.*