MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto.
Escriba(s): Sebastián Acuña y Sebastián Toloza.
Fecha: 30 de octubre de 2020.

Cátedra 13

1. Aspectos finales de largos conservativos

Una pregunta que es natural hacerse es cómo revisar si un largo es conservativo, es decir, ¿cómo determinar si hay ciclos negativos?

Sea $G = (V, E)$ grafo dirigido, ℓ función de largos en E. Sabemos que el algoritmo de Bellman-Ford calcula para todo vértice $t \in V$ la cantidad

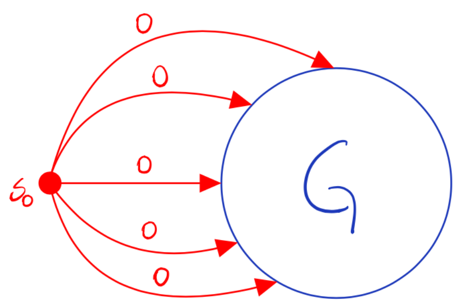
$$d_{\leq n-1}(s,t) = \text{mín}\,\{\ \ell(P)\text{: s-t paseo de largo mínimo, con } \leq n-1 \text{ arcos}\}$$

En donde *paseos* se puede reemplazar por *caminos* si ℓ fuera conservativo.

Luego, recordemos que en la auxiliar pasada se probó el siguiente resultado:

Lema 1. *Existe ciclo de largo negativo alcanzable desde s ssi existe $vw \in E$ con $d_{\leq n-1}(s,w) > d_{\leq n-1(s,v)} + \ell(vw)$.*

Dicho esto, para determinar si existe un ciclo negativo en todo el grafo G basta realizar lo siguiente, agregamos un nodo artificial s_0 fuera del grafo G y lo conectamos con todos los nodos, teniendo estas nuevas aristas largo 0, y aplicamos Bellman-Ford en este nuevo grafo. Notemos que en este nuevo grafo todos los vértices son alcanzables desde s_0, luego todo ciclo que detecte el algoritmo necesariamente estará en G, y notemos que el agregar un nuevo nodo no modifica la complejidad, por lo que sigue siendo $O(n(n+m))$.



1.1. Ejemplo

Una casa de cambios ofrece tasas $r_{ij} > 0$ para cambiar de un tipo de monedas i a un tipo de monedas j (es decir 1 unidad i es igual a r_{ij} unidades de moneda j.

Arbitraje: Secuencia $i_1, ..., i_k$ tal que $r_{i_1 i_2} \cdot ... \cdot r_{i_{k-1} i_1} \cdot r_{i_k i_1} > 1$ (significa que podemos invertir 1 unidad de moneda i_1 y recuperar más que 1 unidad de moneda i_1 solo cambiando).

¿Cómo detectar si existe arbitraje?

Notemos que de la condición $r_{i_1 i_2} \cdot ... \cdot r_{i_{k-1} i_1} \cdot r_{i_k i_1} > 1$ queremos obtener una representación tal que cada tasa r_{ij} sea el vértice de un grafo G, y en donde el producto de ellos represente el largo de un ciclo, en el cual se cumpliría $\ell(i_1 i_2) + ... + \ell(i_{k-1} i_k) + \ell(i_k i_1) < 0$ al aplicar Bellman-Ford, es decir, en donde existiría un ciclo negativo que representaría el arbitraje mencionado anteriormente, por lo que si definimos la función dada por $\ell(ij) := -log(r_{ij})$ se satisface lo pedido gracias a propiedades del logaritmo aplicadas a la primera desigualdad.

2. Emparejamientos de cardinalidad máxima

Hace algunas clases vimos lo que eran los emparejamientos o *matchings*, por lo que recordaremos qué representaban.

2.1. Matchings (emparejamientos)

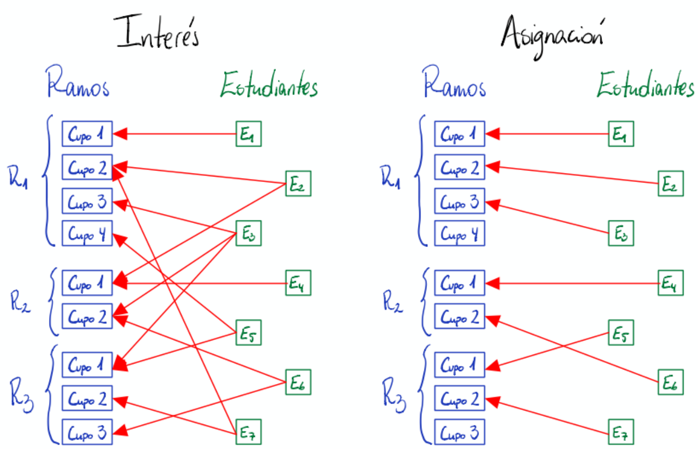
Sea $G = (V, E)$ grafo (simple).

Definición 1. $M \subseteq E$ es un ***matching*** si $\forall e, f \in M$, $e \neq f$, e y f no comparten vértices.

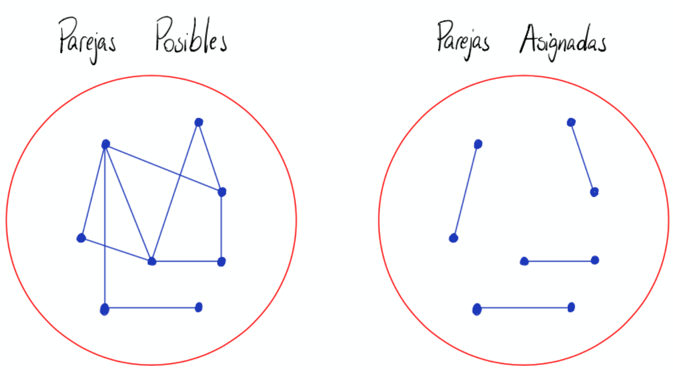
Equivalentemente, $deg_M(v) \leq 1, \forall v \in V$.

El problema que nos interesa resolver es el de **encontrar *matchings* de cardinalidad máxima**, los cuales se pueden visualizar en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Asignación de cupos de ramos a estudiantes: Supóngase que tenemos un grafo bipartito que está representado por dos conjuntos de interés; el primero representa los cupos disponibles de una serie de cursos y el segundo representa a los alumnos que deben inscribirse en ellos, de modo que las aristas representan las preferencias de cada estudiante. Si cada estudiante puede inscribir un solo ramo, el problema que se busca resolver es que se asigne el mayor número de cupos según cada preferencia, es decir, realizar una distribución que cubra a la mayor cantidad de estudiantes.



Ejemplo 2. Problema de los compañeros de cuarto (*roommates*): Supongamos ahora que tenemos un edificio con múltiples habitaciones. Ocupando un grafo general, el conjunto de vértices representará a un grupo de estudiantes que se acomodarán en el edificio, mientras que las aristas representarán si 2 estudiantes son compatibles para ser compañeros de cuarto, por lo que el problema que se busca resolver es el número máximo de parejas (*roommates*) que se pueden armar.



Ahora, recordemos que los matchings representan una dificultad en función de lo que hemos estado trabajando anteriormente, y es que el sistema de los $(E, matchings)$ **no** es una matroide, por lo que el algoritmo glotón no nos servirá para encontrar bases del mismo tamaño.

Sin embargo, podemos rescatar la idea principal del algoritmo glotón para resolver el problema de maximizar los matchings, es decir, que a partir de un matching M, queramos construir un nuevo matching M', cuyo cardinal satisfaga $|M'| = |M| + 1$.

A modo de paréntesis, enunciemos un lema que nos será bastante útil para analizar algunos resultados posteriores:

Lema 2. *Si G es un grafo con $deg_G(v) \leq 2, \forall v \in V$, entonces las componentes conexas de G son todas ciclos o caminos.*

Demostración: Sea C una componente conexa del grafo, analicemos los siguientes casos:

- Si $|V(C)| = 1$ (i.e, es un vértice), entonces ya es un camino.
- Si $|V(C)| > 1$, entonces la componente tiene al menos una arista.

  Ahora, sea P el camino más largo posible dentro de C, sin pérdida de generalidad, con vértices extremos a y b. Analicemos los siguientes subcasos.

  - Si $deg_G(a) = 2$ (análogo a que $deg_G(b) = 2$ por simetría), entonces existe una arista más del camino, luego notemos que esta arista no puede llegar a un vértice nuevo (pues P es el camino más largo (maximal)), y tampoco puede llegar a un vértice interno (pues entonces tendría grado 3 al estar dentro del camino), luego la única posibilidad que existe es que la arista llegue a b, es decir, $e = ab \in E$, y luego $P + e = P + ab$ es un ciclo y es exactamente la componente.
  - Si $deg_G(a) = 1$ y $deg_G(b) = 1$, entonces P es exactamente la componente, pues no tiene más aristas incidentes a los vértices internos ni tampoco incidentes a los extremos.

2.1.1. Nomenclatura

En lo que sigue, veamos un poco de nomenclatura vinculada a los matchings:

Sea $G = (V, E)$ un grafo, $M \subseteq E$ matching.

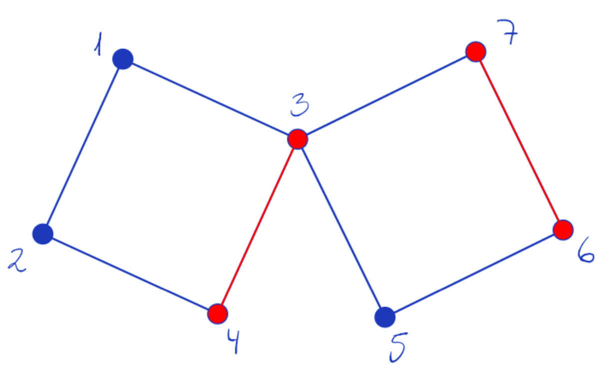
I) $v \in V$ es M-cubierto si $\exists\ e \in M$ que la cubre, es decir, existe una arista en el matching que la incide.

II) $v \in V$ es M-expuesto si no es M-cubierto.

III) Un camino/paseo/ciclo $X = e_1e_2e_3...e_k$ es M-alternante si $\forall i \in [k-1], e_i \in M \Leftrightarrow e_{i+1} \notin M$

IV) Un camino P es M-aumentante si es M-alternante y además sus vértices extremos son M-expuestos, en particular:

$$|P \setminus M| = |P \cap M| + 1$$



Ejemplo 3. Consideremos el siguiente grafo, en donde los matchings están representados por las aristas rojas. Aquí se cumple que:

I) Los vértices 3, 4, 6 y 7 son M-cubiertos.

II) Los vértices 1, 2 y 5 son M-expuestos.

III) El camino 24376 es M-alternante.

IV) Los caminos 12, 1342 y 243765 son M-aumentantes.

2.1.2. Diferencia simétrica con un matching

Sea M matching, $F \subseteq E$. ¿Qué es $F' = F \Delta M$?

Son las aristas que están o bien en F, pero no en M, o bien en M, pero no en F. En otras palabras, son las aristas que están en exactamente uno de F o M.

Ahora, ¿cuál es el poder de la diferencia simétrica? Veamos los siguientes resultados.

I) Si C es ciclo M-alternante entonces $M \Delta C$ es matching y $|M \Delta C| = |M|$.

II) Si P es camino M-aumentante entonces $M \Delta P$ es matching y $|M \Delta P| = |M| + 1$.

2.1.3. Caracterización de optimalidad I

Teorema 1 (König (1931))**.** *Sea M matching, luego M no es de cardinalidad máxima si y solo si $\exists$ camino M-aumentante.*

Demostración: $\Leftarrow$. Si existe camino M-aumentante P, luego $M \Delta P$ es un matching más grande que M (pues $|M \Delta P| = |M| + 1$), por lo que M no es de cardinalidad máxima.

$\Rightarrow$. Como M no es de cardinalidad máxima, entonces existe otro matching con cardinal mayor, luego, sea N matching, tal que $|N| > |M|$, nuestro propósito es encontrar un camino M-aumentante.

Luego, sea $F = N \Delta M$. Notemos que para un vértice v en este grafo, el número máximo de aristas incidentes que pueden haber sobre él es 2 (pues puede tocar a lo más 1 arista de N y a lo más 1 arista de M) es decir, $deg_F(v) = deg_{N \Delta M}(v) \leq 2$, por lo que (V, F) tiene grado máximo 2, y gracias al lema probado anteriormente, sus componentes conexas son caminos y ciclos M-**alternantes**.

Queda ver que existe un camino M-aumentante. En primer lugar, si una componente es un ciclo, entonces tiene igual número de aristas de M que de N (por ser alternantes), y en segundo lugar, si tenemos caminos, estos podrían tener la misma cantidad de aristas de N y M, 1 arista más de N, o bien 1 más de M, pero como $|N| > |M|$, entonces $|N \setminus M| > |M \setminus N|$, por lo que tiene que haber una componente que tenga más aristas en $|N \setminus M|$ que en $|M \setminus N|$, es decir, con más aristas de N que de M (ya que si no fuera así contradecimos que se cumple la desigualdad), luego si tomamos esa componente obtenemos el camino M-aumentante que buscábamos, ya que tiene más aristas de N que de M, y comienza y termina con vértices N-expuestos, porque no pueden haber aristas que toquen esos vértices que no estén en la diferencia simétrica.