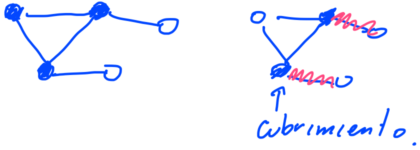
De la clase pasada:



Vertex-cover (Cubrimiento por vértices)

$C \subseteq V$ es cubrimiento por vértices de $G = (V, E)$ si toda arista $e \in E$ toca un vértice de C.

Dualidad débil en grafos generales

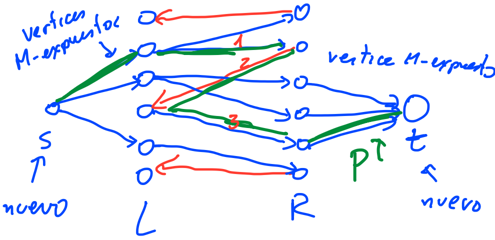
$\forall M$ matching, $\forall C$ cubrimiento, $|M| \leq |C|$

Teorema de König: Si $G = (V, E)$ es un grafo bipartito

$$\max\{|M| : M \text{ matching}\} = \min\{|C| : C \text{ cubrimiento}\}$$

Demostración algorítmica.

$D(G,M)$



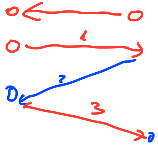
Algoritmo (König 1931)

Entrada: $G = (L \cup R, E)$ bipartito.
$M \leftarrow \emptyset$. n iteraciones
Repetir
- Construir $D(G,M)$ y árbol BFS desde s.
- $Q \leftarrow \{$nodos alcanzables desde s en $D(G,M)\}$.
- **si** $t \in Q$ **entonces**
  - $M \leftarrow M \Delta P$, con P el camino M-aumentante encontrado.
- **en otro caso**
  - $C = (L \setminus Q) \cup (R \cap Q)$
  - **devolver** (M, C)
- **fin**

$O(n+m)$

$M \leftarrow$
$E \setminus M \rightarrow$

aumentar P ($M \leftarrow M \Delta P$)



Complejidad es $O(n(n+m))$

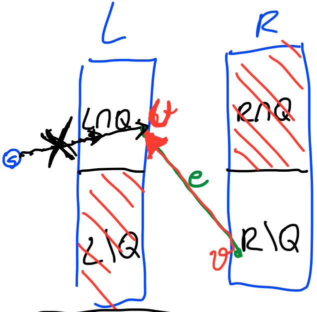
Teorema importante

Teorema

Sea Q el conjunto de los nodos alcanzables desde s en $D(G, M)$. Si M es máximo entonces $C := (L \setminus Q) \cup (Q \cap R)$ es cubrimiento por vértices de G y $\boxed{|C| = |M|}$.

PDQ C es cubrimiento

Sea $e = uv$ con $u \in L \cap Q$, $v \in R \setminus Q$



caso 1. Si $e \notin M$. está dirigido hacia $\rightarrow$

Esto no puede ser pues u es alcanzable desde s y v no lo es, pero uv es arco.

(t)

caso 2: Si $e \in M$. está dirigido hacia $\leftarrow$

• u es M-cubierto $\Rightarrow$ su no es arco del digrafo

. Como los únicos arcos que entran a u lo hacen desde s (no hay) o desde R (y en este caso son del matching) el único arco que entra a u es e.

s-u

Cualquier camino que llegue a u debe pasar por v. v no es alcanzable $\rightarrow\leftarrow$

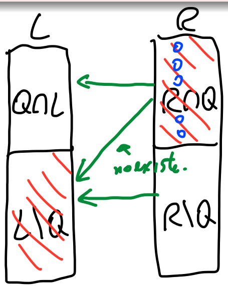
$\boxed{\therefore C \text{ es cubrimiento}}$

(continuación)

Teorema

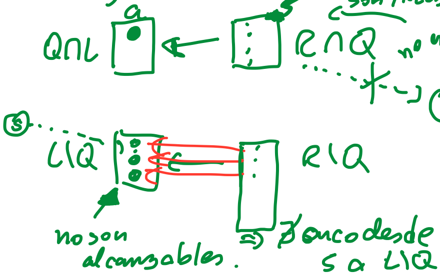
Sea Q el conjunto de los nodos alcanzables desde s en G_M. Si M es máximo entonces $C := (Q \setminus L) \cup (Q \cap R)$ es cubrimiento por vértices de G y $|C| \le |M|$.

$\boxed{|C| \le |M|}$



no existe (no hay arcos $e \in M$ que vayan de $R \cap Q$ a $L \setminus Q$) (el mismo argumento que antes).

Luego las aristas del matching van



Conclusión

- Todo vértice de $R \cap Q$ toca 1 arista de M
- Todo vértice de $L \setminus Q$ toca 1 arista de M.

Cada vértice de C se asocia a una arista única de M.

⇒ Todos los vértices de $L \setminus Q$ tocan al matching que lo cubre

Resumen algorítmico para $G = (V, E)$ bipartito

T. König:

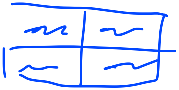
1. Si M es matching máximo, se puede encontrar cubrimiento mínimo en tiempo $O(n+m)$. ✓
2. El algoritmo anterior encuentra un matching máximo y un cubrimiento mínimo de G bipartito en tiempo $O(n(n+m))$ ✓
3. Mejores algoritmos:

$\underset{n\times n}{P}\cdot\underset{n\times n}{Q}$ $\quad O(n^3)$

Algoritmo	Complejidad
König (1931)	$O(n(n+m))$ ✓
Hopcroft-Karp (1973)	$O(\sqrt{n}(n+m))$ ✓
Mucha-Sankowsky (2004)	whp. $O(n^{2,372864})$
Madry (2011)	whp. $\widetilde{O}(m^{10/7})$

la mejor forma de multiplicar dos matrices.

$P \quad \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \qquad Q \quad \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}$



$n^{\log_2 7}$

Teorema de Hall

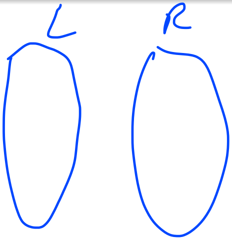
Consecuencia: Teorema de(l matrimonio de) Hall

Hall (1935)

Sea $G = (L \cup R, E)$ grafo bipartito. Existe un matching que cubre L si y solo si:

$$\forall X \subseteq L, |N(X)| \geq |X|$$

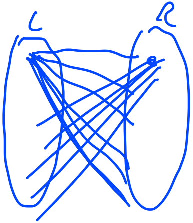
Demostración

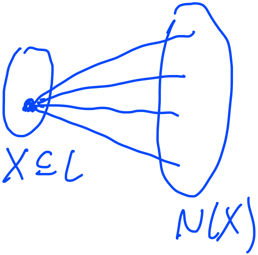


Algunas aplicaciones

Si G es grafo bipartito con aristas y regular (el grado de cada vértice es el mismo) entonces tiene matching perfecto

Hall: $\forall X \subseteq L,\ |N(X)| \geq |X|.$





$\blacksquare$