Clase 13 MA3705. 30 de octubre 2020.

Tabla

- Aspectos finales de largos conservativos
- Emparejamientos de cardinalidad máxima.

Aspectos finales de largos conservativos

¿Cómo determinar si hay ciclos negativos?

Sea $G = (V, E)$ grafo dirigido, ℓ función de largos en E.
Bellman-Ford calcula para todo $t \in V$,
$d_{\leq n-1}(s, t) = \min\{\ell(P) \colon$ s–t paseo de largo mínimo, con $\leq n - 1$ arcos$\}$
En auxiliar se probó que

Lema

Existe ciclo de largo negativo alcanzable desde s ssi existe $vw \in E$ con $d_{\leq n-1}(s, w) > d_{\leq n-1}(s, v) + \ell(vw)$.

Para determinar si existe ciclo negativo en todo el grafo basta ...

Problema presentable: ¿Cómo modificar BF para que entregue la lista de nodos de un ciclo negativo?

Ejemplo

Una casa de cambios ofrece tasas $r_{ij} > 0$ para cambiar de un tipo de monedas i a un tipo de monedas j (es decir 1 unidad de moneda i es igual a r_{ij} unidades de moneda j).

Arbitraje: Secuencia $i_1, \ldots, i_k$ tal que $r_{i_1 i_2} \cdot \ldots r_{i_{k-1}} r_{i_k} \cdot r_{i_k i_1} > 1$
(significa que podemos invertir 1 unidad de moneda i_1 y recuperar más que 1 unidad de moneda i_1 solo cambiando)

¿Cómo detectar si existe arbitraje?

Emparejamientos de cardinalidad máxima

Matching (emparejamientos)

Sea $G = (V, E)$ grafo (simple).

1. $M \subseteq E$ es un matching si $\forall e, f \in M, e \neq f$, e y f no comparten vértices.
   Equivalentemente, $\deg_M(v) \leq 1$, $\forall v \in V$.
2. Problema: Encontrar matchings de cardinalidad máxima.
   Ejemplos:
   1. Asignación de *cupos* de ramos a estudiantes.
   2. Problema de los compañeros de cuarto (roommates).

Dificultad

El sistema $(E, \text{matchings})$ no es una matroide. Luego ...

Paréntesis: Un lema extremadamente útil

Lema

Si G es un grafo con $\deg_G(v) \leq 2$, $\forall v \in V$, entonces las componentes conexas de G son ciclos y caminos.

Nomenclatura

Sea $G = (V, E)$ grafo, $M \subseteq E$ matching.

1. $v \in V$ es M-cubierto si ...

2. $v \in V$ es M-expuesto si ...

3. Un camino/paseo/ciclo $X = e_1 e_2 e_3 \dots e_k$ es M-alternante si ...

4. Un camino P es M-aumentante si es M-aumentante y además sus vértices son M-expuestos. En particular:

$$|P \setminus M| \qquad |P \cap M|$$

Diferencia simétrica con un matching

Sea M matching, $F \subseteq E$ ¿Qué es $F' = F \Delta M$?
Son las aristas...

Poder de la diferencia simétrica

Si C es ciclo M-alternante entonces $M \Delta C$ es matching y $|M \Delta C| =$

Si P es camino M-aumentante entonces $M \Delta P$ es matching y $|M \Delta P| =$

Caracterización de optimalidad I

Teorema (1931 König)

Un matching M no es de cardinalidad máxima si y solo si $\exists$ camino M-aumentante.

No es trivial determinar si existe camino M-aumentante

Idea de un algoritmo.

- Partir de un matching M
- Buscar camino M-aumentante P
- Si lo encuentro. $M \leftarrow M \Delta P$
- Si no lo encuentro ???

¿Cómo certifico que no hay caminos M-aumentantes?

Vertex-Cover

Un segundo problema importante: cubrimiento por vértices

vertex-cover

Sea $G = (V, E)$, $C \subseteq V$. Decimos que C es cubrimiento por vértices del grafo si toda arista $e \in E$ es cubierta (incidente) por un vértice de C.

Ejemplo: Problema de los guardias del museo.

Un guardia parado en una esquina (vértice) de un museo puede vigilar los pasillos adyacentes. ¿Cuántos guardias necesitamos para proteger todo el museo?

Dualidad débil

Sea G un grafo cualquiera. Sea M un matching de G y C un cubrimiento de G.

Teorema

$|M| \leq |C|$

No siempre hay igualdad

¿Por qué se llama dualidad débil?

Un pequeño recuerdo de programación lineal.

Teorema de König para grafos bipartitos

Teorema de König

Si $G = (V, E)$ es un grafo bipartito entonces

$$\text{máx}\{|M| \colon M \text{ matching}\} = \text{mín}\{|C| \colon C \text{ cubrimiento}\}$$

Demostraremos este teorema dando un algoritmo que resuelve simultáneamente ambos problemas.

Construcción auxiliar

Construcción auxiliar