Clase 11 MA3705.16 de octubre 2020.

Tabla

- Largos conservativos: Bellman Ford
- Largos positivos enteros pequeños: BFS
- Largos positivos: Dijkstra

Largos conservativos: Bellman Ford

Recuerdo: Largos conservativos, distancias y desigualdad triangular

$G = (V, E)$ digrafo, $\ell\colon E \to \mathbb{R}$ es conservativo si para cada ciclo C, $\ell(C) \geq 0$.

Si ℓ es conservativo, se tienen las siguientes propiedades:

$$d(s,t) = \min_{P\ s\text{-}t \text{ camino}} \ell(P) = \min_{P\ s\text{-}t \text{ paseo}} \ell(P). \quad \checkmark$$

$$d_{\leq k}(s,t) = \min_{P\ s\text{-}t \text{ camino con } \leq k \text{ arcos}} \ell(P) = \min_{P\ s\text{-}t \text{ paseo con } \leq k \text{ arcos}} \ell(P). \quad \checkmark$$

$$d(s,t) \leq d(s,u) + d(u,t).$$

Teorema: Subcaminos óptimos

Sea P s-t camino mínimo. Todo subcamino de P es de largo mínimo entre extremos.

Demostración:

$\ell(B) = d(x,y)$. son igualdades

$\ell(P) = d(s,t) \leq d(s,x) + d(x,y) + d(y,t) \leq \ell(A) + \ell(B) + \ell(C) = \ell(P)$.

Consecuencia:

Teorema: Si ℓ es conservativo

$$d(s,t) = \min_{w \in N^-(t)} d(s,w) + \ell(wt) \qquad (1)$$

$$d_{\leq k}(s,t) = \min\Big(d_{\leq k-1}(s,t),\ \min_{w \in N^-(t)} d_{\leq k-1}(s,w) + \ell(wt)\Big) \qquad (2)$$

Demostración:

(1) del teorema anterior.

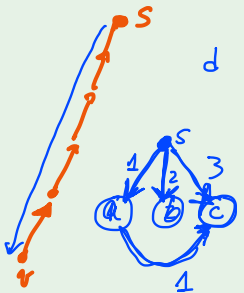
(2) vale siempre para paseos. Como ℓ es conservativo se traspasa a caminos.

Bellman Ford: usa $d_{\leq k}(s,v) = \min\Big(d_{\leq k-1}(s,v), \min_{w \in N^-(v)} d_{\leq k-1}(s,w) + \ell(wv)\Big)$

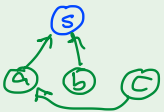
Algoritmo de Bellman-Ford (Bellman (1958), Ford (1956), Moore (1957))

Entrada: $G = (V, E)$ dirigido, $\ell\colon E \to \mathbb{R}$ conservativo, $s \in V$
para $v \in V$ **hacer** $d_{\leq 0}(s,v) = +\infty$, Padre$(v) \leftarrow$ Null
$d_{\leq 0}(s,s) = 0$ ✓
para $k = 1, \ldots, n-1$ **hacer**
  para $v \in V$ **hacer** $d_{\leq k}(s,v) \leftarrow d_{\leq k-1}(s,v)$;
  para $w \in N^-(v)$ **hacer**
    si $d_{\leq k-1}(s,w) + \ell(wv) < d_{\leq k}(s,v)$ **entonces**
      $d_{\leq k}(s,v) \leftarrow d_{\leq k-1}(s,w) + \ell(w,v)$.
      Padre$(v) \leftarrow w$
    fin
  fin
fin fin
devolver $d_{\leq n-1}$, Padre

$d_{\leq k}(s,v)$



$d_{\leq 2}(s,c) = \min\big(3, d_{\leq 1}(s,a) + \ell(ac)\big)$

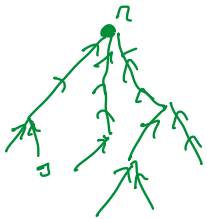


Basta recordar el padre. Arborescencia (de entrada) de caminos mínimos.

Arborescencia:

- Cada nodo, excepto la raíz tiene grado de salida 1.
- La raíz es alcanzable desde cada nodo (equivalentemente: no hay ciclos)

BF
devuelve una arborescencia de entrada
con raíz s
que codifica caminos $s \rightsquigarrow v$ mínimo
$\forall v$.



Complejidad de Bellman Ford

Si $n = O(m)$ ⇒ BF es $O(nm)$.

Entrada: $G = (V, E)$ dirigido, $\ell : E \to \mathbb{R}$ conservativo, $s \in V$
para $v \in V$ **hacer** $d_{\leq 0}(s, v) = +\infty$, $\text{PADRE}(v) \leftarrow \text{NULL}$ — $O(n)$
$d_{\leq 0}(s, s) = 0$
para $k = 1, ..., n-1$ **hacer**
  para $v \in V$ **hacer** $d_{\leq k}(s, v) \leftarrow d_{\leq k-1}(s, v)$ — $O(1)$
  para $w \in N^-(v)$ **hacer**
    si $d_{\leq k-1}(s, w) + \ell(wv) < d_{\leq k}(s, v)$ **entonces**
      $d_{\leq k}(s, v) \leftarrow d_{\leq k-1}(s, w) + \ell(w, v)$
      $\text{PADRE}(v) \leftarrow w$
    fin
  fin
fin fin
devolver $d_{\leq n-1}, \text{PADRE}$ — $O(n)$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{v \in V} O(1 + |N^-(v)|)$$

(*)

Final:

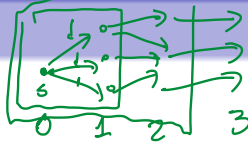
$$O\left(n + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{v \in V} \left(1 + \deg^-(v)\right)\right)$$

$$= O(n + n^2 + nm)$$

$$= O(n(n+m))$$

Largos positivos enteros pequeños: BFS

Otra mirada a BFS



Si los largos son unitarios $\ell(e) = 1, \forall e \in E$, entonces la fórmula:

$$d(s,t) = \min_{w \in N^-(v)} d(s,w) + \ell(w,t)$$

se reduce a

$$d(s,t) = \min_{w \in N^-(v)} d(s,w) + 1$$

Luego las distancias posibles son $0, 1, 2, \ldots, n-1$.
Para un conjunto I, llamemos $L(I) = \{t \in V : d(s,t) \in I\}$. Luego:

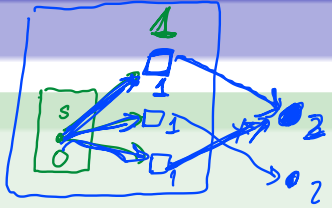
$$t \in L(\{k\}) \iff t \in N^+(L([0,k-1]))$$

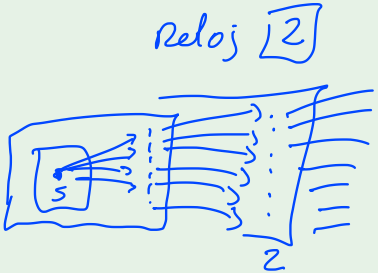
$t \in N^+(L\{k-1\}) \wedge t \notin N^+(L[0,\ldots,k-2])$

BFS (menos eficiente - ilustrativo)

BFS

Entrada: $G = (V, E)$ dirigido, $s \in V$
para $v \in V$ **hacer** $d(s, v) = +\infty$.
$d(s, s) \leftarrow 0$. VISITADOS $\leftarrow \{s\}$, $F \leftarrow \emptyset$.
RELOJ $\leftarrow 0$
mientras $\delta^+(\text{VISITADOS}) \neq \emptyset$ **hacer**
  RELOJ $\leftarrow$ RELOJ $+ 1$.
  ARCOS ACTIVOS $\leftarrow \delta^+(\text{VISITADOS})$
  para $e = uv \in$ ARCOS ACTIVOS **hacer**
    si $v \notin$ VISITADOS **entonces**
      $d(s, v) =$ RELOJ, $F \leftarrow F + e$
      VISITADOS $\leftarrow$ VISITADOS $+ v$.
    fin
  fin
fin
devolver F, d

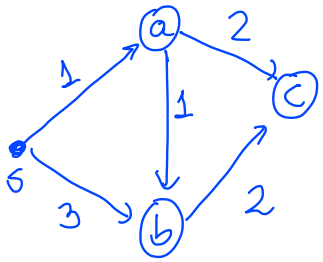


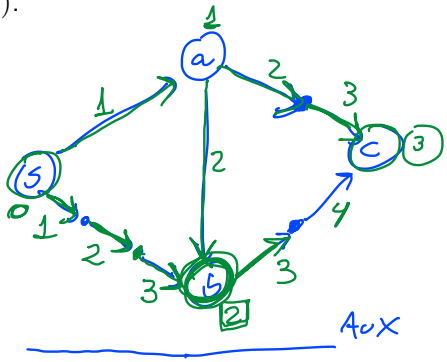


BFS para enteros pequeños

Si $\ell(e) = 1, \forall e$. BFS calcula distancias desde raíz en tiempo $O(n+m)$.

Supongamos ahora $\ell(e) \in \{1, \ldots, M\}$.
¿Cómo calcular distancias en tiempo $O(M(m+n))$.





Mejor: Simular lo que haría BFS

BFS-simulado para largos enteros (intuición)

Entrada: $G = (V, E)$ dirigido, $s \in V$
para $v \in V$ **hacer** $d(s, v) = +\infty$. ✓ reloj ← 0

- Si un nodo u es visitado por primera vez, activar todos los arcos de $\delta^+(v)$.
- Si un arco $e = uv$ es activado, mandar un mensaje a v que llegará en el tiempo RELOJ $+ \ell(uv)$.
- Si un arco termina de mandar su mensaje, desactivarlo.
- Si un nodo v **no visitado** recibe un mensaje, fijar $d(s, v) =$ RELOJ y visitar v.
- Si no hay más acciones en tiempo RELOJ y quedan arcos activos, avanzar el reloj en 1 unidad.

ARCOS ACTIVOS $\leftarrow \emptyset$
VISITADOS $\leftarrow \emptyset$
RELOJ $\leftarrow 0$.
Visitar s.

Ejemplo

Largos positivos: Dijkstra

No necesitamos avanzar el reloj en tiempos discretos

En la simulación anterior *basta* que cada vértice v no visitado guarde en su memoria el momento $T(v)$ en el que recibirá el siguiente mensaje.

Así:

Entrada: $G = (V, E)$ dirigido, $s \in V$
para $v \in V$ **hacer** $d(s, v) = +\infty$, $T(v) \leftarrow \infty$.

- Si un nodo u es visitado por primera vez, activar todos los arcos de $\delta^+(v)$.
- Si un arco $e = uv$ es activado, ~~mandar un mensaje a v que llegará en el tiempo RELOJ $+ \ell(uv)$.~~
  $T(v) \leftarrow \min\{T(v), \text{RELOJ} + \ell(uv)\}$
- Si un arco termina de mandar su mensaje, desactivarlo.
- ~~Si un nodo v **no visitado** recibe un mensaje, fijar $d(s, v) =$ RELOJ y visitar v.~~
  Si un nodo v no visitado tiene $T(v) =$ RELOJ, fijar $d(s, v)$ y visitar v.
- Si no hay más acciones en tiempo RELOJ y quedan arcos activos, avanzar el reloj ~~en 1 unidad.~~
  hasta $\min_{v \in V \setminus \text{VISITADOS}} T(v)$.

ARCOS ACTIVOS $\leftarrow \emptyset$. VISITADOS $\leftarrow \emptyset$. RELOJ $\leftarrow 0$.
Visitar s.

Simplificado queda:

Entrada: $G = (V, E)$ dirigido, $s \in V$
para $v \in V$ **hacer** $d(s, v) = +\infty$, $T(v) \leftarrow \infty$.

- Si un nodo u es visitado por primera vez, activar todos los arcos de $\delta^+(v)$.
- Si un arco $e = uv$ es activado, $T(v) \leftarrow \min\{T(v), \text{RELOJ} + \ell(uv)\}$
- Si un arco termina de mandar su mensaje, desactivarlo.
- Si un nodo v no visitado, tiene $T(v) = \text{RELOJ}$, fijar $d(s, v)$ y visitar v.
- Si no hay más acciones en tiempo RELOJ y quedan arcos activos, avanzar el reloj hasta $\min_{v \in V \setminus \text{VISITADOS}} T(v)$.

ARCOS ACTIVOS $\leftarrow \emptyset$. VISITADOS $\leftarrow \emptyset$. RELOJ $\leftarrow 0$.
Visitar s.

No necesitamos arcos activos:

Entrada: $G = (V, E)$ dirigido, $s \in V$
para $v \in V$ **hacer** $d(s, v) = +\infty$. $T(v) \leftarrow \infty$

- Cada vez que un nodo u es visitado por primera vez.
  Fijar para cada $v \in N^+(u)$ no visitado, $T(v) \leftarrow \min\{T(v), \text{RELOJ} + \ell(uv)\}$
- Si un nodo v no visitado tiene $T(v) = \text{RELOJ}$, fijar $d(s, v) = T(v)$ y visitar v.
- Si no hay más acciones en tiempo RELOJ$< +\infty$ avanzar hasta $\min_{v \in V \setminus \text{VISITADOS}} T(v)$.

VISITADOS $\leftarrow \emptyset$. RELOJ $\leftarrow 0$.
Visitar s.

Dijkstra: no necesitamos reloj

Algoritmo de Dijkstra (Dijkstra 1959):

Entrada: $G = (V, E)$ dirigido, $s \in V$, $\ell\colon E \to \mathbb{R}^+$
para $v \in V$ **hacer** $d(s, v) = +\infty$. $T(v) \leftarrow \infty$.
No-Visitados $\leftarrow V$, $P \leftarrow \emptyset$.
$T(s) \leftarrow 0$.
mientras Tmin $\leftarrow \min_{v \in \text{No-Visitados}} T(v) < +\infty$ **hacer**
  Elegir $v \in$ No-Visitados con $T(v) =$ Tmin.
  $d(s, v) \leftarrow T(v)$
  No-Visitados $\leftarrow$ No-Visitados $- v$
  para $w \in N^+(v) \cap$ No-visitado **hacer**
    $T(w) \leftarrow \min\{T(w), T(v) + \ell(vw)\}$.
  fin
fin
devolver d

Dijkstra: Arborescencia óptima y complejidad.

Algoritmo de Dijkstra (Dijkstra 1959):

Entrada: $G = (V, E)$ dirigido, $s \in V$, $\ell \colon E \to \mathbb{R}^+$
para $v \in V$ **hacer** $d(s, v) = +\infty$. $T(v) \leftarrow \infty$. $\text{Padre}(v) \leftarrow \text{Null}$
$\text{No-Visitados} \leftarrow V$, $F \leftarrow \emptyset$.
$T(s) \leftarrow 0$.
mientras $\text{Tmin} \leftarrow \min_{v \in \text{No-Visitados}} T(v) < +\infty$ **hacer**
  Elegir $v \in \text{No-Visitados}$ con $T(v) = \text{Tmin}$.
  $d(s, v) \leftarrow T(v)$
  $\text{No-Visitados} \leftarrow \text{No-Visitados} - v$
  para $w \in N^+(v) \cap \text{No-visitado}$ **hacer**
    si $T(v) + \ell(vw) < T(w)$ **entonces**
      $T(w) \leftarrow T(v) + \ell(vw), \text{Padre}(w) \leftarrow v$
    fin
  fin
fin
devolver d, Padre

Mejores implementaciones

Al igual que Prim, Dijkstra se puede implementar mejor con mejores estructuras de datos

En tiempo $O(n^2)$ usando arreglos y listas enlazadas.
En tiempo $O((n+m)\log n)$ usando Heaps Binarios.
En tiempo $O(m + n\log n)$ usando Heaps de Fibonacci.

Resumen de Caminos mínimos desde un nodo s en grafos dirigidos

Función de largo	Algoritmo	Complejidad
Cualquiera en DAG	Orden Topológico + PD	$O(n+m)$
Unitaria	BFS	$O(m+n)$
Enteros entre 1 y M	BFS	$O(M(m+n))$
No negativos	Dijkstra	$O(m+n\log n)$
Conservativos	Bellman Ford	$O(n(n+m))$

¡Ojo: Estos algoritmos también funcionan en grafos no dirigidos (basta bidirigir aristas)!