MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Daniel Araya y Joaquín Cisternas.
Fecha: 25 de septiembre de 2020.

Cátedra 6

1. Sistemas de independencia

Recordemos que un par $(S, \mathcal{I})$ es un sistema de independencia cuando $\mathcal{I}$ es un conjunto finito de referencia e $\mathcal{I} \in 2^S$ es una familia de subconjuntos de S, tal que $\forall J \subseteq \mathcal{I}$ es independiente.

Además $(S, \mathcal{I})$ cumple con las siguientes propiedades:

- **Independencia del vacío:** $\emptyset \in \mathcal{I}$
- **Cerrado para la inclusión** $\forall (X \subseteq Y \subseteq S), \quad Y \in \mathcal{I} \implies X \in \mathcal{I}$

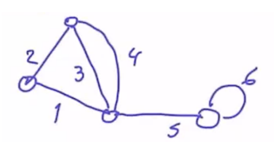
Y sea $X \subseteq S$ subconjunto de S, B es una base de X si:

- $B \in \mathcal{I}$
- $\forall x \in X \setminus B, \quad B + x \notin \mathcal{I}$

1.1. Ejemplos importantes

- **Matroide gráfica de un (multi)grafo** $G = (V, E)$: Sea $\mathcal{I} := \mathcal{I}(G) = \{F \subseteq E : F \text{ es acíclico}\}$
  Es un sistema de independencia especial cuyos elementos son las aristas del grafo y los independientes son los subconjuntos de aristas acíclicas.

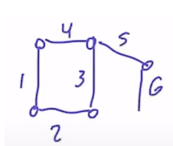
  Ejemplo:

  En este caso, $\{1, 2, 5\} \subseteq \mathcal{I}(G)$, sin embargo $\{1, 2, 3, 4, 5\} \nsubseteq \mathcal{I}(G)$, pues contiene un loop en las aristas $\{1, 2, 3\}$. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$, las bases de X corresponden al conjunto $B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\{1, 4\}\{2, 3\}, \{2, 4\}\}$. Notemos que todas las bases tienen el mismo cardinal. Se puede definir el rango de X como el tamaño común de todas las bases, en este caso rango$(X) = 2$

- **Matchings de un (multi)grafo** $G = (V, E)$:
  Un matching es un conjunto de aristas de un grafo o multigrafo que no comparten vértices entre si.
  $(E, \{\text{matchings}\})$: Sistema de matchings de G.

  Ejemplo:

  En este grafo algunos matchings son: {2,5}, {1,3} $\in \mathcal{M}$
  También vemos que algunas de las bases de E son {2,4,6}, {1,3,5} y {2,5}, destacando que no todas las bases tienen el mismo cardinal a diferencia del ejemplo anterior.

- **Sistemas de vectores**: Sean $v_1, v_2, ..., v_m$ vectores de un espacio vectorial, $I \subseteq [m]$, con $[m]$ el conjunto de los índices de los vectores. Diremos que es I es independiente si $(v_i)_{i \in I}$ es linealmente independiente en el espacio vectorial.

  Ejemplo: Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in \mathbb{R}^2$ tales que

  $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Notemos que el sistema de independencia está dado por $([5], \mathcal{L})$, con $\mathcal{L}$ como el conjunto de independientes. Las bases de [5] están dadas por $B = \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{4,5\}\}$. Podemos volver a definir el rango pues la cardinalidad de las bases es la misma, por lo que rango$([5]) = 2$

1.2. Encontrar una base de un conjunto

Observación: Todo conjunto independiente $I \subseteq X$ se puede extender a una base de X.

Sea $(S, \mathcal{I})$ un sistema de independencia y tomamos $X \subseteq S$. El algoritmo que nos permitirá encontrar una base de X es el siguiente:

Algorithm 1: Greedy (algoritmo glotón)

Sea $\mathcal{I} \subseteq X$, $I \in \mathcal{I}$. $B \leftarrow I$
for $e \in X \setminus \mathcal{I}$ **do**
  if $B + e \in \mathcal{I}$ **then**
    $B \leftarrow B + e$
  end
end
return B

Siendo finalmente B una base de X que contiene a I.

Demostración:
Sea B al final del algoritmo. Si B no fuera base:
$\exists\ f \in X \setminus B, B + f \in \mathcal{I}$
Sea B' el conjunto que teníamos en el momento en que f fue visitado.
B' + f $\notin$ I. Pero $B' + f \subseteq B + f \subseteq \mathcal{I}$
Contradicción $\rightarrow\leftarrow$

1.3. Cálculo de eficiencia

Para calcular su eficiencia se reescribirá el algoritmo, esta vez se utilizará $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$ como el conjunto de los elementos del conjunto de referencia de tal manera que el algoritmo se escribe:

Algorithm 2: Greedy con oráculo de independencia

Sea $(S, \mathcal{I})$ sistema de independencia
$B \leftarrow \emptyset$
$S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$
for $i \in \{1,...,m\}$ **do**
  if $B + s_i \in \mathcal{I}$ **then**
    $B \leftarrow B + s_i$
  end
end
return B

Existe una cantidad pequeña de instrucciones, pero hay una instrucción que es distinta a lo estudiado anteriormente, que es la de revisar la independencia en cada iteración. Para ello se supone que se tiene acceso a un algoritmo que resuelve esta tarea.

Definición 1 (Oráculo de independencia)**.** Es una función que testea en una unidad de tiempo si un conjunto $A \subseteq \mathcal{I}$

Complejidad:

El algoritmo consiste en realizar una llamada al oráculo y una operación (ambas de orden constante). Sin embargo estas instrucciones se realizan m cantidad de veces, por lo que la complejidad del algoritmo es del orden $O(m)$ para el total de llamadas del oráculo y $O(m)$ para el total de operaciones realizadas.

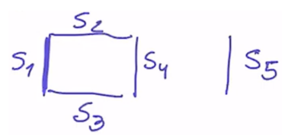
1.4. Bases y glotón

Sea $(S, \mathcal{I})$ un sistema de independencia. Sea $\pi : s_1, \ldots, s_m$ es un ordenamiento de S en un sistema de independencia $(S, \mathcal{I})$.

Los prefijos de π son los conjuntos $S_i = \{s_1, \ldots, s_i\}$, para $i \in [m] + 0$

Propiedad: Si J es la salida del algoritmo glotón en π, entonces para todo prefijo, J $\cap S_i$ es base de S_i.

Ejemplo: (Matching)



Tomando $J = \{s_1, s_4, s_5\}$ como la salida del algoritmo glotón, la intersección con $S_3 = \{s_1, s_2, s_3\}$ es $\{s_1\}$, lo cual es justamente una base de S_3.

Lo mismo NO ocurre para cualquier conjunto: tomando como ejemplo el mismo $J = \{s_1, s_4, s_5\}$ y el conjunto $\{s_2, s_3\}$, la intersección esta vez es vacío y no una base del conjunto $\{s_2, s_3\}$.

2. Matroides

Sea $(S, \mathcal{I})$ un sistema de independencia y $w : S \to \mathbb{R}$ una función de peso. Los siguientes problemas son interesantes de estudiar:

- Encontrar una base de S de tamaño máximo.
- Encontrar una base de S de peso $w(S)$ máximo
- Encontrar un conjunto independiente $J \in I$ de peso $w(J)$ máximo

Estos problemas son en general de alta complejidad, pues no existen algoritmos polinomiales capaces de resolverlos. Sin embargo es posible resolverlo para el caso de las matroides.

Definición 2 (Equicardinalidad de Bases)**.** Sea $(S, \mathcal{I})$ un sistema de independencia. Se dice que $(S, \mathcal{I})$ satisface equicardinalidad de bases si $\forall X \subseteq S$,con $B = \{B_1, ..., B_m\}$ el conjunto de bases de X, $|B_i| = |B_j|, \forall i \neq j$

Observación: Una matroide es un sistema de independencia que satisface equicardinalidad de bases. Llamaremos al rango $r(X)$ al único tamaño posible de las bases de un conjunto X

Ejemplos:

- Matroides gráficos: Sea $G = (V, E)$ grafo y el sistema de independencia dado por $(E, \mathcal{I})$, con $\mathcal{I}$ el conjunto de los acíclicos.
  Si $F \subseteq E$, $r(X) = |V| -$ cc(V, F)
- Matroides lineales: $([m], \mathcal{L})$ sistema de independencia. $r(X) = dim(< \{v_i : i \in X\} >)$

Observación: Los Matching no son matroides

2.1. Base de tamaño máximo en matroides

Sea $(S, \mathcal{I})$ una matroide. Se quiere encontrar la base de tamaño máximo, notemos que cualquier base cumple con ser la de tamaño máximo, pues toda matroide cumple con equicardinalidad de bases. Luego para encontrar una base se utiliza el algoritmo glotón antes visto.

2.2. Base de peso máximo en matroides

Sea $(S, \mathcal{I})$ una matroide y $w : S \to \mathbb{R}$ función de peso. Se quiere encontrar la base de peso máximo para este matroide, a diferencia del problema anterior, el algoritmo glotón no es suficiente para poder resolver el problema, para ello es necesario realizar una modificación que nace a partir del siguiente lema.

Lema: Sea $X \subseteq S = \{s_1, .., s_n\}$ y $w : S \to \mathbb{R}$ función de peso, tal que $w(s_1) \geq w(s_2) \geq ... \geq w(s_n)$ y s_{n+1} un elemento artificial tal que $w(s_{n+1}) = w(s_n)$. El peso del conjunto X está dado por:

$$w(X) = w(s_{n+1})|X| + \sum_{n=1}^{n} |X \cap S_i|(w(s_i) - w(s_{i+1}))$$

Finalmente se demostrará si el algoritmo glotón con los pesos ordenados de mayor a menor, devuelve una base de peso máximo:

Sea (S, $\mathcal{I}$) una matroide. La salida ALG de este algoritmo es base de peso máximo de (S, $\mathcal{I}$).

Demostración: Sea ALG conjunto entregado (ALG es base de S), su peso será:

w(ALG) = $\sum_{i=1}^{n} |ALG \cap S_i| \underbrace{(w(S_i) - w(S_{i+1}))}_{\geq 0 \text{ (orden decreciente de los pesos)}} + |ALG| \cdot w(S_{n+1})$

Sea OPT la mejor base.

Observación:

- $ALG \cap S_i$ es base de S_i
- $OPT \cap S_i \subseteq S_i$ y $OPT \cap S_i \subseteq OTP (\in \mathcal{I}) \to OTP \cap S_i \in \mathcal{I} \to \exists\ B_i$ base de S_i, $B_i \supseteq OPT \cap S_i$

Luego por propiedad de matroide: $|OPT \cap S_i| \leq |B_i| = |ALG \cap S_i|$

Finalmente:

w(ALG) = $\sum_{i=1}^{n} |ALG \cap S_i|(w(S_i) - w(S_{i+1})) + |ALG| \cdot w(S_{n+1})$

$\geq \sum_{i=1}^{n} |OPT \cap S_i|(w(S_i) - w(S_{i+1})) + |OPT| \cdot w(S_{n+1})$ = w(OPT)

Como w(ALG) $\geq$ w(OPT), concluimos.