Clase 10 MA3705. 09 de octubre 2020.

Tabla

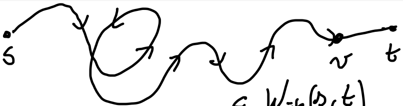
- Paseos de largo mínimo con k aristas: PD
- Largos Conservativos
- Bellman Ford

Paseos de largo mínimo con k aristas: PD

- $G = (V, E)$ grafo **dirigido**.
- $\mathcal{W}_{=k}(s, t)$: Paseos (dirigidos) de s a t con exactamente k arcos.
- Dado $\ell\colon E \to \mathbb{R}$, $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s, t) = \min\{\ell(W)\colon W \in \mathcal{W}_{=k}(s, t)\}$.

Teorema $k \geq 1$.

Sea $W \in \mathcal{W}_{=k}(s, t)$ con $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s, t) = \ell(W)$, vt el último arco de W y $W' = W - vt$ entonces $\ell(W') = d^{\mathcal{W}}_{=k-1}(s, v)$.



W . $W' = W - vt$

Dem: $\cdot\ \ell(W') \geq d^{W}_{=k-1}(s,v)$

Si $R \in W_{=k-1}(s,v)$

$\ell(R) = d^{W}_{=k-1}(s,v)$

$$\ell(R) = \ell(\overbrace{R+vt}^{\in W_{=k}(s,t)}) - \ell(vt)$$

$$\geq \ell(W) - \ell(vt) = \ell(W') \Rightarrow \ell(W') = \ell(R) = d^{W}_{=k-1}(s,v).$$

Consecuencias: subpaseos óptimos

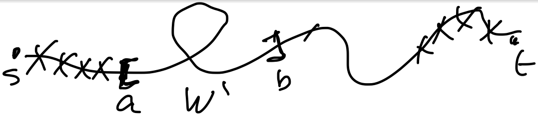
El teorema anterior también sirve al remover un arco del principio:

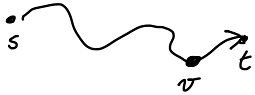
Teorema

Sea $W \in \mathcal{W}_{=k}(s,t)$ con $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s,t) = \ell(W)$, sv el primer arco de W y $W' = W - sv$ entonces $\ell(W') = d^{\mathcal{W}}_{=k-1}(s,v)$.

Corolario: subpaseos tienen largo mínimo (para número de arcos fijo)

Sean $W \in \mathcal{W}_{=k}(s,t)$ con $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s,t)$ y W' subpaseo de W de a a b, entonces $\ell(W') = d^{\mathcal{W}}_{=|W'|}(a,b)$.





$\mathrm{ALG}(s,t;k)$

Entrada: $G=(V,E)$ digrafo, $s,\ t\in V$, k, $\ell\colon E\to\mathbb{R}$

si $k=0$, $s=t$ **entonces devolver** 0

si $k=0$, $s\neq t$ **entonces devolver** $+\infty$

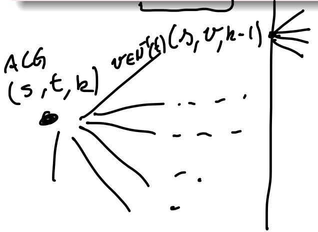
si $k\geq 1$ **entonces devolver** $\min\limits_{v\in N^-(t)}\left[\mathrm{ALG}(s,v;k-1)+\ell(v,t)\right]$

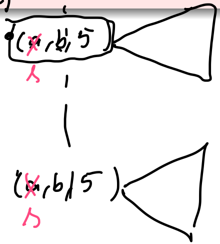
Teorema

Si $k\geq 1$, $\underbrace{d^{\mathcal{W}}_{=k}}(s,t) = \min\limits_{v\in N^-(t)} d^{W}_{=k-1}(s,v)+\ell(v,t)$

Demostración

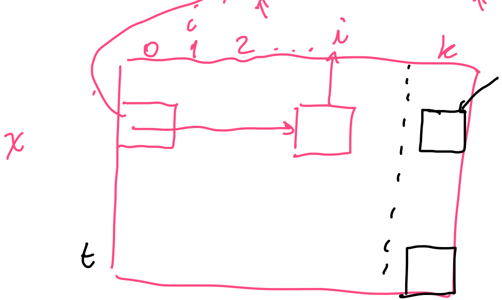
Aplicar Teo de la Primera Página





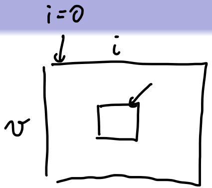
Programación Dinámica

¡Conviene intentar calcular $d^{\mathcal{W}}_{=i}(s, x)$ para todo x (dejando s fijo) y para todo $i \leq k$!



$d^{W}_{=i}(s, x)$

Un mejor algoritmo para calcular $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s,t)$



Programación Dinámica

Entrada: $G=(V,E)$ digrafo, $s \in V$, k, $\ell\colon E \to \mathbb{R}$

para $v \in V$ **hacer**

$$d^{\mathcal{W}}_{=0}(s,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = s, \\ +\infty & \text{si } v \neq s. \end{cases}$$

fin

$O(n)$

k veces

para $j = 1 \ldots k$ **hacer**

para $v \in V$ **hacer**

$$d^{\mathcal{W}}_{=j}(s,v) \leftarrow \min_{w \in N^-(v)} \{ d^{\mathcal{W}}_{=j-1}(s,w) + \ell(w,v) \}.$$

$\text{Padre}_{=j}(v) \leftarrow \operatorname{argmin}_{w \in N^-(v)} (\ \%\ )$

fin

Mal conteo

$O(n \cdot n)$

fin

devolver $d^{\mathcal{W}}_{=0}(s,\cdot), d^{\mathcal{W}}_{=1}(s,\cdot), \ldots, d^{\mathcal{W}}_{=k}(s,\cdot)$

s ... t

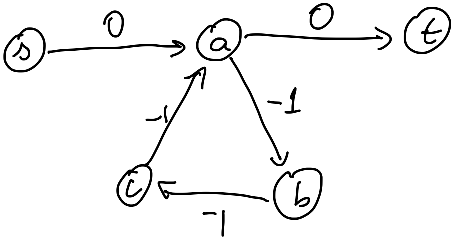
$\text{padre}_{=k}(t) = v_{k-1}$

$\text{padre}_{=k-1}(v_{k-1})$

$v_i = \text{padre}_{=i+1}(v_{i+1})$.

Ojo: Podemos recuperar el paseo.

¿Ciclos de largo negativo?



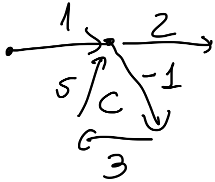
$sat \rightarrow$ largo $= 0$

$\ell(sabct) = -3$

$\ell(s(abc)^k t) = -3^k$

Largos conservativos

Ej:



$\ell \colon E \to \mathbb{R}$ es conservativa si no hay ciclos en $G = (V, E)$ con largo negativo.

$\mathcal{W}_{\leq k} = \{W:$ paseo con $\leq k$ arcos$\}$		$\mathcal{P}_{\leq k} = \{P:$ camino con $\leq k$ arcos$\}$	
$d^{\mathcal{W}}_{\leq k}(s,t) = \min_{W \in \mathcal{W}_{\leq k}} \ell(W)$	$d^{\mathcal{W}}(s,t) = \min_{W \in \mathcal{W}} \ell(W)$	$d^{\mathcal{P}}_{\leq k}(s,t) = \min_{W \in \mathcal{P}_{\leq k}} \ell(W)$	$d^{\mathcal{W}}(s,t) = \min_{W \in \mathcal{W}} \ell(W)$

Caminos tienen igual poder que paseos (*)

$d^{\mathcal{W}}_{\leq k}(s,t) = d^{\mathcal{P}}_{\leq k}(s,t)$ y $\boxed{d^{\mathcal{W}}(s,t) = d^{\mathcal{P}}(s,t)}$

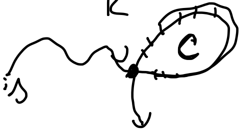
$\boxed{\leq}$

Dem: $\mathcal{W}_{\leq k}(s,t) \supseteq \mathcal{P}_{\leq k}(s,t)$

$\min_{W \in} \{\ell(W)\} \leq \min_{P \in} \{\ell(P)\}$

$\geq$) Sea R el paseo que alcanza $d^{W}_{\leq k}(s,t)$ con menos arcos $\leadsto$ R es camino.

R



$\ell(R') = \ell(R) - \underbrace{\ell(C)}_{\geq 0} \leq \ell(R)$

$R' = R - C$

(*) $d^{P}(s,t) = d^{P}_{\leq n-1}(s,t) = d^{W}_{\leq n-1}(s,t) \geq d^{W}(s,t)$

$d^{W}(s,t) = d^{W}_{\leq |W|}(s,t) = d^{P}_{\leq |W|}(s,t) \geq d^{P}(s,t)$

Consecuencias

Si ℓ es conservativa entonces podemos escribir:

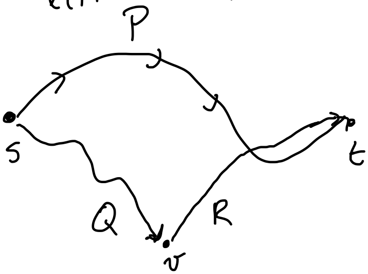
$$
\begin{aligned}
d_{\le k}(s,t) &= d^{\mathcal{W}}_{\le k}(s,t) = d^{\mathcal{P}}_{\le k}(s,t)\\
\boxed{d(s,t)} &= d^{\mathcal{W}}_{\cancel{\le k}}(s,t) = d^{\mathcal{P}}_{\cancel{\le k}}(s,t)\\
d(s,t) &= d_{\le n-1}(s,t)
\end{aligned}
$$

Más aún $d(\cdot,\cdot)$ es una métrica de grafos
(no es métrica en el sentido habitual):

1. $d(s,t)$ puede ser negativa.
2. $d(v,v) = 0$ pero $d(u,v) = 0 \not\Longrightarrow u = v$
3. $d(s,t)$ no es necesariamente igual a $d(t,s)$.
4. **Desigualdad triangular:** $d(s,t) \le d(s,v) + d(v,t)$.

Desigualdad triangular

$$\underset{\ell(P)}{\underset{\parallel}{d(s,t)}} \leq \underset{\ell(Q)}{\underset{\parallel}{d(s,v)}} \underset{+\infty}{\underset{\uparrow}{\;}} + d(v,t) \underset{+\infty}{\underset{\uparrow}{\;}} = \ell(R)$$



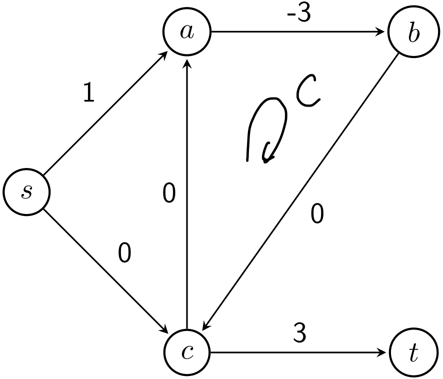
$\boxed{Q \cup R \text{ es un paseo de } s \text{ a } t}$

$$\ell(Q) + \ell(R) = \ell(Q \cup R) \geq \ell(P)$$

$\blacksquare$

caminos

Si definieramos distancia como $d(s,t) = d^{\mathcal{P}}(s,t)$.



$d(s,t) = 1$

$\ell(sabct) = 1$

$d(s,a) = 0$

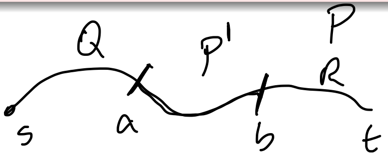
$d(a,t) = 0$

$d(s,t) > d(s,a) + d(a,t)$

Desigualdad triangular implica Principio de Optimalidad de ~~Belmann~~ Bellman.

Teorema: Si ℓ es conservativo

Sea P camino de s a t con $\ell(P) = d(s,t)$. Sea P' subcamino de P (de a a b), entonces $\ell(P') = d(a,b)$



Dem: des Δ:

$$
\begin{aligned}
d(s,t) &\leq d(s,a) + d(a,b) + d(b,t) \\
&\leq \ell(Q) + \ell(P') + \ell(R) \\
&= \ell(P)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ igualdad!

$d(s,a) = \ell(Q)$
$d(a,b) = \ell(P')$
$d(b,t) = \ell(R)$

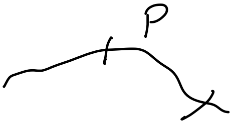
Propuesto

se hará prox clase.

Teorema: Si ℓ es conservativo

$$d(s,t) = \min_{w \in N^-(\cancel{v}\, t)} d(s,w) + \ell(w,t)$$

$$\boxed{d_{\leq k}(s,t)} = \min\Big(d_{\leq k-1}(s,t),\ \underbrace{\min_{w \in N^-(\cancel{v}\, t)} d_{\leq k-1}(s,w) + \ell(w,t)}\Big)$$



Dem:

Propuesta.