Clase 10 MA3705. 09 de octubre 2020.

Tabla

- Paseos de largo mínimo con k aristas: PD
- Largos Conservativos
- Bellman Ford

Paseos de largo mínimo con k aristas: PD

Paseos con exactamente k arcos.

- $G = (V, E)$ grafo **dirigido**.
- $\mathcal{W}_{=k}(s,t)$: Paseos (dirigidos) de s a t con exactamente k arcos.
- Dado $\ell\colon E \to \mathbb{R}$, $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s,t) = \text{mín}\{\ell(W)\colon W \in \mathcal{W}_{=k}(s,t)\}$.

Teorema

Sea $W \in \mathcal{W}_{=k}(s,t)$ con $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s,t) = \ell(W)$, vt el último arco de W y $W' = W - vt$ entonces $\ell(W') = d^{\mathcal{W}}_{=k-1}(s,v)$

Consecuencias: subpaseos óptimos

El teorema anterior también sirve al remover un arco del principio:

Teorema

Sea $W \in \mathcal{W}_{=k}(s,t)$ con $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s,t) = \ell(W)$, sv el primer arco de W y $W' = W - sv$ entonces $\ell(W') = d^{\mathcal{W}}_{=k-1}(s,v)$

Corolario: subpaseos tienen largo mínimo (para número de arcos fijo)

Sean $W \in \mathcal{W}_{=k}(s,t)$ con $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s,t)$ y W' subpaseo de W de a a b, entonces $\ell(W') = d^{\mathcal{W}}_{=|W'|}(a,b)$.

Un posible (mal?) algoritmo para calcular $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s,t)$

$\mathrm{ALG}(s,t;k)$

Entrada: $G=(V,E)$ digrafo, s, $t \in V$, k, $\ell\colon E \to \mathbb{R}$
si $k=0$, $s=t$ **entonces devolver**
si $k=0$, $s \neq t$ **entonces devolver**
si $k \geq 1$ **entonces devolver**

Teorema

Si $k \geq 1$, $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s,t) =$

Una observación

¡Conviene intentar calcular $d^{\mathcal{W}}_{=i}(s,x)$ para todo x (dejando s fijo) y para todo $i \leq k$!

Un mejor algoritmo para calcular $d^{\mathcal{W}}_{=k}(s,t)$

Programación Dinámica

Entrada: $G=(V,E)$ digrafo, $s \in V$, k, $\ell\colon E \to \mathbb{R}$
para $v \in V$ **hacer**

$$d^{\mathcal{W}}_{=0}(s,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = s, \\ +\infty & \text{si } v \neq s. \end{cases}$$

fin
para $j = 1 \dots k$ **hacer**
  para $v \in V$ **hacer**

$$d^{\mathcal{W}}_{=j}(s,v) = \min_{w \in N^-(v)} \{ d^{\mathcal{W}}_{=j-1}(s,w) + \ell(w,v) \}.$$

  fin
fin
devolver $d^{\mathcal{W}}(s,\cdot)_{=0}, d^{\mathcal{W}}(s,\cdot)_{=1}, \dots, d^{\mathcal{W}}(s,\cdot)_{=k}$

Complejidad

¿Ciclos de largo negativo?

Largos conservativos

Definiciones en largos conservativos para digrafo $G = (V, E)$

$\ell\colon E \to \mathbb{R}$ es conservativa si no hay ciclos en $G = (V, E)$ con largo negativo.

$\mathcal{W}_{\leq k} = \{W\colon$ paseo con $\leq k$ arcos$\}$		$\mathcal{P}_{\leq k} = \{P\colon$ camino con $\leq k$ arcos$\}$	
$d_k^{\mathcal{W}}(s,t) = \min\limits_{W \in \mathcal{W}_{\leq k}} \ell(W)$	$d^{\mathcal{W}}(s,t) = \min\limits_{W \in \mathcal{W}} \ell(W)$	$d_k^{\mathcal{P}}(s,t) = \min\limits_{W \in \mathcal{P}_{\leq k}} \ell(W)$	$d^{\mathcal{W}}(s,t) = \min\limits_{W \in \mathcal{W}} \ell(W)$

Caminos tienen igual poder que paseos

$d_k^{\mathcal{W}}(s,t) = d_k^{\mathcal{P}}(s,t)$ y $d^{\mathcal{W}}(s,t) = d^{\mathcal{P}}(s,t)$

Consecuencias

Si ℓ es conservativa entonces podemos escribir:

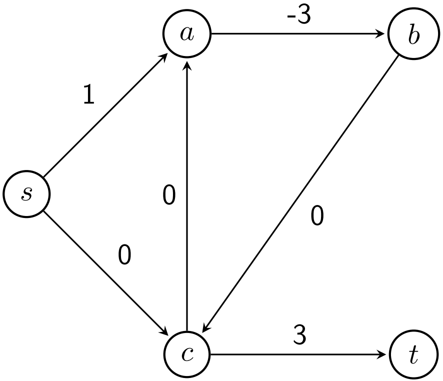
$$\begin{aligned} d_{\leq k}(s,t) = &\ d^{\mathcal{W}}_{\leq k}(s,t) = \ d^{\mathcal{P}}_{\leq k}(s,t) \\ d(s,t) = &\ d^{\mathcal{W}}_{\leq k}(s,t) = \ d^{\mathcal{P}}_{\leq k}(s,t) \\ d(s,t) = &\ d_{\leq n-1}(s,t) \end{aligned}$$

Más aún $d(\cdot,\cdot)$ es una métrica de grafos
(no es métrica en el sentido habitual):

1. $d(s,t)$ puede ser negativa.
2. $d(v,v) = 0$ pero $d(u,v) = 0 \not\Longrightarrow u = v$
3. $d(s,t)$ no es necesariamente igual a $d(t,s)$.
4. **Desigualdad triangular:** $d(s,t) \leq d(s,v) + d(v,t)$.

Desigualdad triangular

Si definieramos distancia como $d(s,t) = d^{\mathcal{P}}(s,t)$.



Desigualdad triangular implica Principio de Optimalidad de Bermann

Teorema: Si ℓ es conservativo

Sea P camino de s a t con $\ell(P) = d(s,t)$. Sea P' subcamino de P (de a a b), entonces $\ell(P') = d(s,t)$

Consecuencias

Teorema: Si ℓ es conservativo

$$d(s,t) = \min_{w \in N^-(v)} d(s,w) + \ell(w,t)$$

$$d_{\leq k}(s,t) = \min\Big(d_{\leq k-1}(s,t), \min_{w \in N^-(v)} d_{\leq k-1}(s,w) + \ell(w,t)\Big)$$

Algoritmo de Bellman-Ford (Bellman (1958), Ford (1956), Moore (1957))

Entrada: $G = (V, E)$ dirigido, $\ell\colon E \to \mathbb{R}$ conservativo, $s \in V$

para $v \in V$ **hacer** $d_{\leq 0}(s, v) = \begin{cases} 0 & s = v \\ +\infty & s \neq v \end{cases}$

para $j = 1, \ldots, n-1$ **hacer**

  para $v \in V$ **hacer** $d_{\leq j}(s, v) \leftarrow d_{\leq j-1}(s, v)$

  para $w \in N^{-}(v)$ **hacer**

    si $d_{\leq j}(s, v) > d_{\leq j-1}(s, w) + \ell(w, v)$ **entonces**

      $d_{\leq j}(s, v) \leftarrow d_{\leq j-1}(s, w) + \ell(w, v)$

      $\pi(v) \leftarrow w$

    fin

  fin

fin

Complejidad