

MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2020.

Profesor: José Soto

Escriba(s): Antonia Suazo Ruiz y Juan Pablo Sepúlveda.

Fecha: 2 de Octubre de 2020 (<https://youtu.be/x1-0iVjHcdQ>).

Cátedra 8

1. Resumen

En esta cátedra se va a continuar la revisión de contenidos acerca de matroides, sus conjuntos de bases, de circuitos, y del conjunto $\text{span}(X)$, el span.

2. Repaso: Bases, circuitos y rango en matroides

2.1. Bases de una matroide $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$

Definición 1 (Bases de una matroide). Son los independientes maximales del conjunto \mathcal{I} tales que cumplen las siguientes propiedades:

1. Existe al menos una base.
2. Ninguna base contiene otra.
3. **Intercambio.** Si P, Q son bases y $x \in P \setminus Q$ entonces existe $y \in Q \setminus P$, con $P - x + y$ base.
4. **Intercambio negativo.** Si P, Q son bases y $x \in P \setminus Q$ entonces existe $y \in Q \setminus P$, con $Q + x - y$ base.

Demostración propiedades

1. Basta notar que $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. Pues por definición deben ser maximales.
3. Tomamos $P - x, Q \in \mathcal{I}$ con $|P - x| < |Q|$. Luego, por aumento:

$$\Rightarrow (\exists y \in Q \setminus (P - x)) \quad P - x + y \in \mathcal{I}.$$

Por cardinalidad de bases, se tiene que $P - x + y$ es base.

4. Sea

$$R := (P \cap Q) + x \in \mathcal{I} \implies R \subseteq P \in \mathcal{I} \implies R \in \mathcal{I}$$

Entonces se tiene que:

$$R \subseteq Q + x \quad \wedge \quad Q \subseteq Q + x$$

Y por aumento:

$$(\exists I \in \mathcal{I}, \quad |I| = |Q|) \quad R \subseteq I \subseteq Q + x$$

Se concluye con esto que I es base y por lo tanto tiene la forma $I = (Q + x) - y$ por cardinalidad de bases donde $y \in Q \setminus P$.

2.2. Circuitos en una matroide $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$

Definición 2 (Circuitos). Son aquellos dependientes minimales que cumplen las siguientes propiedades:

1. \emptyset no es circuito.
2. Ningún circuito contiene a otro distinto.
3. **Eliminación de circuitos.** Si C, D son circuitos distintos y $e \in C \cap D$ entonces existe circuito $K \subseteq C \cup D - e$.

Propiedad del circuito único

Para comenzar a trabajar con circuitos, es clave saber esta útil propiedad:

Teorema 1 (Circuito único). Para $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ matroide.

Si $X \in \mathcal{I}, e \in \mathcal{S} \setminus X$, entonces existe **a lo más un circuito** $C \subseteq X + e$.

Demostración

Razonamos por contradicción y suponemos que existe más de un circuito en $X + e$.

Sean $C, D \subseteq X + e$, entonces $e \in C \cap D$. Por eliminación de circuitos tenemos que:

$$C \cup D - e \notin \mathcal{I}$$

Lo cual es una contradicción pues $C \cup D - e \subseteq X$. Concluimos que si existe un circuito, es único.

2.3. Rango de una matroide $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$

Definición 3 (Rango). Se define $r : 2^{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{N}$, la función de rango de una matroide $\mathcal{M} = (\mathcal{S}, \mathcal{I})$ como sigue:

$$r(X) := \max\{|I| : I \subseteq X, I \in \mathcal{I}\}$$

Propiedades

1. $0 \leq r(X) \leq |X|$.
2. $X \subseteq Y \implies r(X) \leq r(Y)$.
3. **Submodularidad.** $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.
4. $(\forall e \in \mathcal{S}) \quad r(X + e) - r(X) \in \{0, 1\}$.

Demostración propiedades

1. Esto sale por definición, pues ella nos dice que el rango es el cardinal entre \emptyset y X .
2. Basta notar que una base en X , también será un independiente en Y , entonces por definición de rango, el tamaño de $r(Y)$ debe ser más grande $r(X)$.
3. Tomamos X, Y conjuntos. Sea $B_{X \cap Y}$ base de $X \cap Y$, por aumento podemos extenderla a B_X , una base de X . De forma análoga extendemos desde B_X a $B_{X \cup Y}$, una base $X \cup Y$. Entonces tenemos:

$$B_{X \cap Y} \subseteq B_X \subseteq B_{X \cup Y}$$

Y también que:

$$\begin{aligned} r(X \cup Y) + r(X \cap Y) &= |B_{X \cup Y}| + |B_{X \cap Y}| \\ r(X \cup Y) + r(X \cap Y) &= |B_X| + |B_{X \cup Y} \setminus B_X| + |B_{X \cap Y}| \\ r(X \cup Y) + r(X \cap Y) &= r(X) + \underbrace{|B_{X \cap Y} \dot{\cup} (B_{X \cup Y} \setminus B_X)|}_{\subseteq Y} \end{aligned}$$

Y $B_{X \cap Y} \dot{\cup} (B_{X \cup Y} \setminus B_X) \in \mathcal{I}$, entonces $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.

4. Si $e \in X$ entonces $X + e = X \implies r(X + e) - r(X) = r(X) - r(X) = 0$.
 Por otro lado, si $e \in S \setminus X$, podemos usar submodularidad con X y $\{e\}$, entonces:

$$\begin{aligned} r(X \cup \{e\}) - r(X \cap \{e\}) &= r(X + e) - r(\emptyset) \\ &\leq r(X) + r(\{e\}) \end{aligned}$$

Luego, sabemos que $r(\{e\}) \in \{0, 1\}$ pues $\{e\}$ es un singleton y la función $r \in \mathbb{N}$. Finalmente, por la primera propiedad concluimos lo pedido.

Observación. Un singleton tiene rango 0 si es dependiente, y tiene rango 1 si es independiente.

3. Span

3.1. Span en una matroide

Definición 4 (Span). Sea $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ una matroide, $r : 2^{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{N}$ su función de rango, y sea $X \subseteq \mathcal{S}$, se define el $\text{span}(X)$ como:

$$\text{span}(X) = \{e \in \mathcal{S} : r(X + e) = r(X)\} \tag{1}$$

Esta definición, si bien es interesante, es menos intuitiva con respecto a las anteriores, pues tiene una interpretación menos “conjuntista”, pero básicamente se refiere a los elementos de \mathcal{S} tales que al agregarlos a X , no aumentan el valor de su evaluación mediante r , esto es, que las bases de $X + e$ son las mismas que las bases de X .

Ejemplo 1 (Span en espacios vectoriales). En espacios vectoriales, la noción de span coincide con la noción clásica de espacio generado. Esto es:

$$\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = \text{span}(\{v_1, \dots, v_n\})$$

Veamos que cumplen las siguientes propiedades:

1. $X \subseteq \text{span}(X)$.
2. $X \subseteq Y \implies \text{span}(X) \subseteq \text{span}(Y)$.
3. $r(\text{span}(X)) = r(X)$.
4. $f \in \text{span}(X) \iff \text{span}(X + f) = \text{span}(X)$.
5. Si $e \notin \text{span}(X)$,

$$e \in \text{span}(X + f) \implies f \in \text{span}(X + e).$$

Demostración propiedades

1. Directo de la definición.
2. Sea $e \in \text{span}(X)$, por submodularidad de r se tiene que:

$$r(Y + e) - r(Y) \leq r(X + e) - r(X)$$

Por definición, como $e \in \text{span}(X)$, el lado derecho es 0, luego:

$$r(Y + e) \leq r(Y)$$

Y además, sabemos que r cumple aumentos unitarios, esto es:

$$r(Y) \leq r(Y + e)$$

Así, $r(Y + e) = r(Y)$, con lo que, por definición de $\text{span}(Y)$, $e \in \text{span}(Y)$.

3. Propuesto.
4. Propuesto.
5. La idea general de la demostración se basa en que tenemos lo siguiente:

$$X \subseteq X + e \subseteq X + e + f, \quad X \subseteq X + f \subseteq X + e + f.$$

Y que sabemos por las hipótesis que:

$$r(X + e) = r(X) + 1, \quad r(X + e + f) = r(X + f).$$

$$[r(X + e + f) - r(X + e)], [r(X + f) - r(X)] \in \{0, 1\}$$

$$r(X + e + f) - r(X + e) + r(X + f) - r(X) = r(X + e + f) - r(X + f) + r(X + f) - r(X)$$

Luego, razonando por contradicción, se obtiene lo pedido.

La idea de las 2 demostraciones pendientes es abordarlas primero desde un enfoque de espacios vectoriales, para generar intuición sobre las propiedades, y luego intentar demostrarlo para un span en una matroide general, usando las propiedades anteriores. Por último, es interesante notar que la propiedad 5, junto con otras propiedades básicas, es suficiente para definir una matroide.

3.2. Bases como generadores

A continuación se enuncia una propiedad que interconecta la noción de generadores en espacios vectoriales con el span. Esto es que una base B de un conjunto X es tal que es independiente y además genera X .

Proposición 1. *Sea B base de X , entonces $X \subseteq \text{span}(B) = \text{span}(X)$.*

Demostración

Primero, notamos que $r(B) = r(\text{span}(B)) = |B| = r(X) = r(\text{span}(X))$, ocupando la definición de r y las propiedades anteriores. Además, vemos que $X \subseteq \text{span}(B)$ razonando por contradicción, tomando un $e \in X \setminus \text{span}(B)$ y notando que su existencia implica que $B \notin \mathcal{I}$, lo cual es una contradicción. Finalmente, con la propiedad 4, se concluye de manera directa que $\text{span}(X) = \text{span}(B)$.

Esta demostración nos deja además el siguiente resultado:

Corolario 1. *Sea $I \in \mathcal{I}$, $e \notin I$. Se tiene que $I + e \in \mathcal{I} \iff e \notin \text{span}(I)$.*

3.3. Algoritmo glotón y span

Finalmente, queda enunciada esta caracterización del output del algoritmo glotón mediante el span.

Teorema 2. *Sea ALG la base de (S, \mathcal{I}) obtenida al aplicar el algoritmo glotón en el orden s_1, \dots, s_n .*

$$s_i \in \text{ALG} \iff s_i \notin \text{span}(S_{i-1}).$$