Clase 7

Algoritmo de Kruskal y Matroides

Profesor: José Soto
Escribas: Diego Manríquez y Damiale Villablanca

Recuerdo

- Una matroide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ es una matroide si $\forall X \subseteq S$, sus bases tienen igual tamaño

Borrado/Restricción de Matroides

- Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ una matroide y $T \subseteq S$
- Se define la restricción a T como:
$$\mathcal{M}|_T = (T, \{X \in I : X \subseteq T\})$$
$\mathcal{M}|_T$ también es una matroide
- Se define el matroide borrando T como:
$$\mathcal{M} \setminus T = \mathcal{M}|_{(S \setminus T)}$$

Problemas Importantes

- Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ matroide y $w : S \to \mathbb{R}$ función de peso, se presentan los siguientes problemas:

  1. Encontrar una base de S de tamaño máximo:
     Para esto uso el algoritmo Glotón con cualquier orden
  2. Encontrar una base de S de peso $w(S)$ máximo:
     Uso Glotón de mayor a menor peso
  3. Encontrar una base de S de peso $w(S)$ mínimo:
     Uso Glotón de menor a mayor peso
  4. Encontrar un conjunto independiente $J \in I$ de peso $w(J)$ máximo:
     Sea $S^+ = \{e \in S : w(e) \geq 0\}$. Las bases de peso máximo en $\mathcal{M}|_{S^+}$ son independientes de peso máximo en $\mathcal{M}$
     Esto es equivalente a usar Glotón de mayor a menor peso sin considerar los negativos

Algoritmo de Kruskal

- Sea $G = (V, E)$ grafo y $\mathcal{M}(G) = (E, \mathit{bosques})$
- Si G es conexo, las bases de E son los árboles generadores
- Escribimos el algoritmo de Kruskal como:

  Data: $G = (V, E)$
  Result: $T = (V, F)$

  Ordeno los elementos $e_i \in E, i \in \{1, ..., m\}$ con
  $w(e_1) \leq w(e_2) \leq ... \leq w(e_m)$

  $F \leftarrow \varnothing$ **for** *i de 1 hasta m* **do**
      if $F + e_i$ *es acíclico* **then**
          $F \leftarrow F + e_i$
      end
  end

  Algorithm 1: Algoritmo de Kruskal

- Correctitud: Dado que esto es una implementación del algoritmo Glotón con una elección especial del orden, este es un algoritmo correcto. Como voy tomando los elementos de menor peso, esto me genera un MST
- Complejidad: Ordenar mis m aristas me toma $O(mlog(m))$, revisar que $F + e_i$ es acíclico o no toma $O(1)$ oráculo y agregar e_i a F toma $O(1)$, como hago esto m veces en total tengo que me toma $O(mlog(m))$ operaciones y $O(m)$ oráculo
- Sin embargo, este tiempo se puede reducir si usamos una nueva estructura de datos

Unión-Fino

- Unión-Fino es una estructura de datos para mantener particiones de n elementos
- Esto determina si un elemento pertenece a un conjunto en un tiempo $O(log(n))$
- Puedo unir 2 conjuntos en $O(log(n))$

Algoritmo de Kruskal versión 2

- Usando Unión-Fino ya no dependo de un oráculo, con lo que reescribo Kruskal como:

  Data: $G = (V, E)$
  Result: $T = (V, F)$

  Ordeno los elementos $e_i \in E, i \in \{1, ..., m\}$ con
  $w(e_1) \leq w(e_2) \leq ... \leq w(e_m)$

  Creo una partición de V con n singletons

  $F \leftarrow \varnothing$ **for** *i de 1 hasta m* **do**
      Sea $e_i = u_i v_i$
      if *Conjunto(u_i)* $\neq$ *Conjunto(v_i)* **then**
          $F \leftarrow F + e_i$
          Union(Conjunto(u_i), Conjunto(v_i))
      end
  end

  Algorithm 2: Algoritmo de Kruskal versión 2

- Conjunto(u_i) es la componente conexa a la que pertenece u_i

- No puedo quitarme de encima el tiempo de ordenar mis m elementos de E (toma tiempo $O(mlog(m))$), pero ahora, revisar si cada arista cierra un ciclo toma tiempo $O(log(n))$, agregar mi arista a F toma $O(1)$ y unir ambos conjuntos toma $O(log(n))$

  En total tengo $O(mlog(m)) + mO(log(n)) + O(1) = O(mlog(n))$

Equivalencias de ser Matroide

- Un sistema de independencia $(S, \mathcal{I})$ es matroide ssi se cumple cualquiera de la siguientes:

  1. Equicardinalidad de las bases: Para todo $X \subseteq S$ todas sus bases tienen igual cardinal

  2. Glotón: Para todo peso $w : S \to \mathbb{R}$, el algoritmo Glotón (ordenando de forma decreciente) devuelve una base de peso máximo en S

  3. Aumento:
  $$(\forall X, Y \in \mathcal{I},\ |X| < |Y|),\ \exists z \in Y \setminus X,\ X + z \in Y$$

  4. Aumento débil:
  $$(\forall X, Y \in \mathcal{I},\ |X \setminus Y| = 1,\ |Y \setminus X| = 2),\ \exists z \in Y \setminus X,\ X + z \in Y$$

- Demostraciones:

  $(3 \Rightarrow 4)$ es un caso particular

  $(3 \Rightarrow 1)$ Sea $T \subseteq S$ conjunto y B_1, B_2 bases de T, si no tienen el mismo tamaño (SPDG, $|B_1| < |B_2|$), por aumento puedo agregar un $z \in B_2 \setminus B_1$ tal que $B_1 + z \in \mathcal{I}$, $B_1 + z \subseteq T$, pero esto es una contradicción con que B_1 era base (maximal para la inclusión), luego mis bases son de igual tamaño

($4 \Rightarrow 3$) Por inducción en $k = |X \setminus Y|$

Caso base, $k = 0$:

$$X \subseteq Y \Rightarrow X + z \subseteq Y, Y \in \mathcal{I} \Rightarrow X + z \in \mathcal{I}, \forall z \in Y$$

Si el cardinal de la diferencia es 0 es porque X es subconjunto de Y, luego para cualquier z en la diferencia de Y con X, $X + z$ es subconjunto de Y, como Y es un independiente, este otro por la inclusión es independiente

Para $k \geq 1$:

Sea $e \in X \setminus Y$, $X' = X - e$, tengo que se cumple $X', Y \in \mathcal{I}$ y $|X' \setminus Y| = k - 1$, luego, por hipótesis tengo que existe un $z \in Y \setminus X'$ tal que $X' + z \in \mathcal{I}$

Pero $|(X' + z) \setminus Y| = |(X - e + z) \setminus Y| = k - 1$ y $|X - e + z| = |X| < |Y|$, aplico mi hipotesis otra vez, con lo que tengo que existe un $w \in Y \setminus (X - e + z)$ tal que $X - e + z + w \in \mathcal{I}$

Finalmente, como $|X \setminus (X - e + z + w)| = 1$ y $|(X - e + z + w) \setminus X| = 2$, entonces por aumento débil, $\exists x \in \{z, w\} \subseteq Y \setminus X$ tal que $X + x \in \mathcal{I}$ que es lo que buscaba

($1 \Rightarrow 4$) Sean $X, Y \in \mathcal{I}$, $Y \setminus X = \{a, b\}$, $X \setminus Y = \{c\}$

Caso trivial: $X \cup Y = Y + c \in \mathcal{I} \Rightarrow X + a, X + b \in \mathcal{I}$

Caso difícil: $Y + c \notin \mathcal{I}$

Como Y es base de $Y + c$, todo independiente subconjunto de $Y + c$ se puede extender a una base. Como X es un independiente subconjunto de $Y + c$, entonces tengo que existe una base B entre medio: $X \subseteq B \subseteq Y + c$

Dado que mis bases tienen el mismo cardinal, entonces mis posibles B son $X + a$ y $X + b$

<u>Bases de una Matroide</u>

- Las bases de una matroide son los independientes maximales para la inclusión
- Unas propiedades son:
  1. Existe al menos una base
  2. Ninguna base contiene a otra
  3. Intercambio: si P, Q son bases y $x \in P \setminus Q$, entonces existe $y \in Q \setminus P$ con $P - x + y$ base
  4. Intercambio Negativo: Si P, Q son bases y $x \in P \setminus Q$ entonces existe $y \in Q \setminus P$ con $Q + x - y$ base
- Demostración de 3: Para $x \in P$, $P - x, Q$ son independientes, como $|P| = |Q| \Rightarrow |P - x| < |Q|$, luego, existe $y \in Q \setminus (P - x)$ tal que $P - x + y$ es base

Circuitos

- Los circuitos son los dependientes minimales
- Unas propiedades son:
  1. $\varnothing$ no es circuito
  2. Ningun circuito contiene a otro
  3. Eliminación de circuitos: Si C, D son circuitos distintos y $e \in C \cap D$, entonces existe un circuito K en $C \cup D - e$

Teorema

- Si $X \in \mathcal{I}$, $e \in S \setminus X$, entonces existe a lo más un circuito $C \subseteq X + e$