Clase 09 MA3705. 05 de octubre 2020.

Tabla

- Algoritmo glotón revisitado.
- Contracción y Dual.
- Paseos de largo mínimo en grafos dirigidos

Algoritmo Glotón Revisitado

Algoritmo glotón y span

Glotón.
ALG ← ∅
for i = 1..n
  Si ALG + s_i ∈ $\mathcal{I}$ ⇒ ALG ← ALG + s_i
Return. ALG

Sea ALG la base de $(S, \mathcal{I})$ obtenida al aplicar el algoritmo glotón en el orden $s_1, \ldots, s_n$.

Teorema

{ $s_1, \ldots, s_{i-1}$ }

$$s_i \in \mathrm{ALG} \iff s_i \notin \mathrm{span}(S_{i-1}).$$

Demostración:
Usamos que $\mathrm{ALG} \cap S_{i-1}$ es base de S_{i-1}. Luego $\mathrm{span}(\mathrm{ALG} \cap S_{i-1}) = \mathrm{span}(S_{i-1})$.
Con esto:

$$s_i \in \mathrm{ALG} \iff (\mathrm{ALG} \cap S_{i-1}) + s_i \in \mathcal{I} \iff s_i \notin \mathrm{span}(\mathrm{ALG} \cap S_{i-1}) = \mathrm{span}(S_{i-1})$$

Kruskal

Algoritmo de Kruskal MST

Entrada: $G = (V, E)$ conexo ✓

Ordenar E como $e_1, \ldots, e_m$ con $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$

$F \leftarrow \emptyset$ **para** i *de 1 a* m **hacer**

  si $\underline{F + e_i \text{ acíclico}}$ / $e_i \notin \mathrm{span}(F)$ / $e_i \notin \mathrm{span}(E_{i-1})$ **entonces**

    $F \leftarrow F + e_i$

  fin

fin

devolver $T = (V, F)$

Contracción y Dual

Una propiedad curiosa en matroides

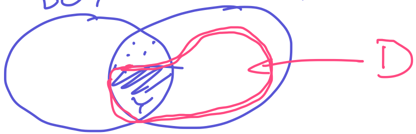
$(S, \mathcal{I})$

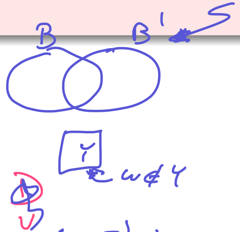
$\mathbb{R}^2$

Si B y B' son bases de X, entonces para todo conjunto $Y \subseteq S \setminus X$.

$$B \cup Y \in \mathcal{I} \iff B' \cup Y \in \mathcal{I}.$$

Dem:





$\Rightarrow$ $B \cup Y \in \mathcal{I}$. Como $B' \in \mathcal{I} \to$ extendamos B' a una base de $B' \cup Y$

$D = B' \cup Z$ con $Z \subseteq Y$. Si $Z \neq Y$. $\Rightarrow |D| < |B' \cup Y| = |B \cup Y|$

Aumento: $\exists\, w \in B \cup Y \setminus D = B \cup Y \setminus (B' \cup Z)$.

tq $D + w \in \mathcal{I}$. $\Rightarrow w \in B \setminus B'$ | Pero $D = B' \cup Z$, $B' + w \in \mathcal{I}$. $\rightarrow\leftarrow$

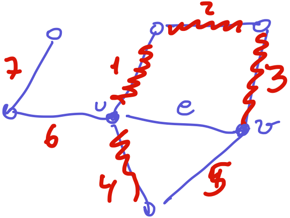
En una matroide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$

Sea $X \subseteq S$ y B base de X. Definamos $\mathcal{I}/X = \{Y \subseteq S \setminus X : Y \cup B \in \mathcal{I}\}$ entonces $\mathcal{I}/X$ es independiente de la base B elegida.

Contracción

Definimos $\mathcal{M}/X = (S \setminus X, \mathcal{I}/X)$.
Desafío: $\mathcal{M}/X$ es matroide.
Auxiliar: Su función de rango r' satisface $r'(Y) = r(Y \cup X) - r(X), \forall Y \subseteq S \setminus X$

Contracción en matroide gráfica.



$G \to M(G) = (E(G), \text{acíclicos})$

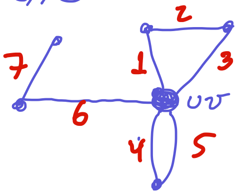
$M/\{e\} = \Big(E-e, \{\underbrace{F \subseteq E-e}_{\mathcal{I}/e} : F+e \text{ es acíclico}\}\Big)$

$\{1,2,3\} \notin \mathcal{I}/e.$

$\{1,4\} \in \mathcal{I}/e$

$\Downarrow$ Grafos

G/e



$X \subseteq E-e$, X es acíclico en G/e

$\iff$

$X+e$ es acíclico en G.

Matroide Dual

Ej: G conexo bases de $M^*(G)$ son los complementos de árboles generador.

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$. Definimos el dual $\mathcal{M}^*$ como aquel cuyas bases son los complementos de las bases de $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}^*$ es matroide

Dem: · Bases de M^* son duttes.: P^c, Q^c son bases de $M^* \iff P, Q$ bases de M

$P^c \subseteq Q^c \qquad Q \subseteq P \Rightarrow Q = P.$

$\Rightarrow Q^c = P^c$

· Existe al menos 1 base :

· Intercambio M^* satisface J

Sean P^c, Q^c bases de M^* tq $e \in P^c \setminus Q^c$. $\qquad$ P, Q bases de M, $e \in Q \setminus P$

Int. Negativo en M

pdq $\exists f \in Q^c \setminus P^c$ tq $\underbrace{P^c - e + f}_{= (P+e-f)^c}$ es base de M^* $\qquad$ $\exists f \in P \setminus Q$ tq $P + e - f$ es base de M

Si $\mathcal{M}$ es matroide. Entonces llamamos cobases, coindependientes, cocircuitos, corango, cospan a los equivalentes en su matroide dual.

Ejemplo $M(G)$. matroide gráfica (de G conexo)

X es coindependiente $\iff$ X es independiente en $M^*(G)$

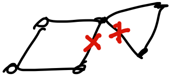
$\subseteq E$

$\iff$ X es subconjunto de al una base de $M^*(G)$ $\quad B^c$

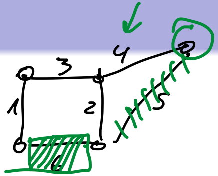
$\iff$ $\underbrace{\exists \text{ base } B \text{ de } M(G)}$ tq $X \subseteq B^c$

$\iff$ $\exists$ árbol generador B tq $B \subseteq X^c$.

$\iff$ X^c es conexo.



Kruskal reverso



¡Bases de peso mínimo son complementos de cobases de peso máximo!

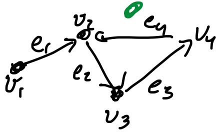
Algoritmo de Kruskal Reverso

Entrada: $G = (V, E)$ conexo
Ordenar E como $e_1, \ldots, e_m$ con $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \cdots \geq w(e_m)$ (¡de mayor a menor!)
$F \leftarrow E$ **para** i *de 1 a* m **hacer**
  si $F - e_i$ *conexo* **entonces**
    $F \leftarrow F - e_i$
  fin
fin
devolver $T = (V, F)$

Paseos de largo mínimo en grafos dirigidos

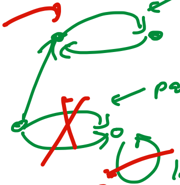
cola de e $t(e) \xrightarrow{e} h(e)$ ← cabeza de e

Ej:



Paseo $v_1 v_2 v_3 v_4 v_2$

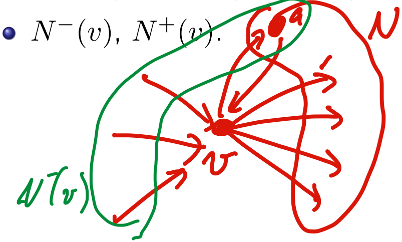
Si pueden haber antiparalelos



↑ podemos permitir loops (a,a).

- Nodos y Arcos.
- Cabeza y Cola
- Digrafo simple. ⇝ Par ordenado de vértices (a,b)

- Paseos, senderos, caminos, ciclos dirigidos.
- $N^-(v)$, $N^+(v)$.



$N^+(v) \to N^{out}$

$$N^+(v) = \{ w \in V : (v,w) \in E \}$$

$$N^-(v) = \{ w \in V : (w,v) \in E \}$$

$\to N^{in}$

Paseos dirigidos de largo mínimo

$G=(V,E)$ dirigido (simple) $ab=(a,b)$

Sea $\ell\colon E \to \mathbb{R}$ función de largo. Extendemos esa función a los paseos $W = v_1 v_2 \dots v_k$ como:

$$\ell(W)=\sum_{i=1}^{k-1}\ell(v_i v_{i+1})$$

Algunas preguntas naturales. Dado G, ℓ, s y t

1. Determinar si existe paseo dirigido de s a t.
2. Encontrar paseo dirigido de s a t de menor número de arcos.
3. Encontrar paseo dirigido de s a t con exactamente k arcos, de largo mínimo.
4. Encontrar paseo dirigido de s a t de largo mínimo.

Si $\ell: E\to\mathbb{R}$, $\ell(e)>0$ se puede.

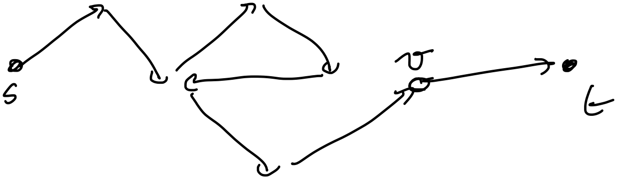
Obs: 4 es una pregunta difícil.

Paseos con exactamente k arcos.

- $\mathcal{W}_{=k}(s,t)$: Todos los paseos dirigidos de s a t con exactamente k arcos.
- Dado $\ell\colon E \to \mathbb{R}$, $D(s,t;k) = \min\{\ell(W)\colon W \in \mathcal{W}_{=k}(s,t)\}$ $\quad (\min \emptyset = +\infty)$

Teorema

Si $W \in \mathcal{W}_{=k}(s,t)$ es de largo mínimo y vt es el último arco de W entonces $W - vt \in \mathcal{W}_{=k-1}(s,v)$ es de largo mínimo.



k

W

$W - vt$