Tabla

- Algoritmo glotón revisitado.
- Contracción y Dual.
- Paseos de largo mínimo en grafos dirigidos

Algoritmo Glotón Revisitado

Sea ALG la base de $(S, \mathcal{I})$ obtenida al aplicar el algoritmo glotón en el orden $s_1, \dots, s_n$.

Teorema

$$s_i \in ALG \iff s_i \notin \text{span}(S_{i-1}).$$

Demostración:

Usamos que $ALG \cap S_{i-1}$ es base de S_{i-1} . Luego $\text{span}(ALG \cap S_{i-1}) = \text{span}(S_{i-1})$.

Con esto:

$$s_i \in ALG \iff (ALG \cap S_{i-1}) + s_i \in \mathcal{I} \iff s_i \notin \text{span}(ALG \cap S_{i-1}) = \text{span}(S_{i-1})$$

ALGORITMO DE KRUSKAL

Entrada: $G = (V, E)$ conexo

Ordenar E como $e_1, \dots, e_m$ con $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$

$F \leftarrow \emptyset$ **para** i de 1 a m **hacer**

si $F + e_i$ acíclico / $e_i \notin \text{span}(F)$ / $e_i \notin \text{span}(E_{i-1})$ **entonces**

$F \leftarrow F + e_i$

fin

fin

devolver $T = (V, F)$

Contracción y Dual

Si B y B' son bases de X , entonces para todo conjunto $Y \subseteq S \setminus X$.

$$B \cup Y \in \mathcal{I} \iff B' \cup Y \in \mathcal{I}.$$

En una matroide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$

Sea $X \subseteq S$ y B base de X . Definamos $\mathcal{I}/X = \{Y \subseteq S \setminus X : Y \cup B \in \mathcal{I}\}$
entonces $\mathcal{I}/X$ es independiente de la base B elegida.

Contracción

Definimos $\mathcal{M}/X = (S \setminus X, \mathcal{I}/X)$.

Desafío: $\mathcal{M}/X$ es matroide.

Auxiliar: Su función de rango r' satisface $r'(Y) = r(Y \cup X) - r(X), \forall Y \subseteq S \setminus X$

Contracción en matroide gráfica.

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$. Definimos el dual $\mathcal{M}^*$ como aquel cuyas bases son los complementos de las bases de $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}^*$ es matroide

Si $\mathcal{M}$ es matroide. Entonces llamamos cobases, coindependientes, cocircuitos, corango, cospan a los equivalentes en su matroide dual.

¡Bases de peso mínimo son complementos de cobases de peso máximo!

ALGORITMO DE KRUSKAL REVERSO

Entrada: $G = (V, E)$ conexo

Ordenar E como $e_1, \dots, e_m$ con $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \dots \geq w(e_m)$ (¡de mayor a menor!)

$F \leftarrow E$ **para** i de 1 a m **hacer**

si $F - e_i$ conexo **entonces**

$F \leftarrow F - e_i$

fin

fin

devolver $T = (V, F)$

Paseos de largo mínimo en grafos dirigidos

- Nodos y Arcos
- Cabeza y Cola
- Digrafo simple.
- Paseos, senderos, caminos, ciclos dirigidos.
- $N^-(v)$, $N^+(v)$.

Sea $\ell: E \rightarrow \mathbb{R}$ función de largo. Extendemos esa función a los paseos $W = v_1v_2 \dots v_k$ como:

Algunas preguntas naturales. Dado G, ℓ, s y t

- 1 Determinar si existe paseo dirigido de s a t .
- 2 Encontrar paseo dirigido de s a t de menor número de arcos.
- 3 Encontrar paseo dirigido de s a t con exactamente k arcos, de largo mínimo.
- 4 Encontrar paseo dirigido de s a t de largo mínimo.

Paseos con exactamente k arcos.

- $\mathcal{W}_{=k}(s, t)$: Todos los paseos dirigidos de s a t con exactamente k arcos.
- Dado $\ell: E \rightarrow \mathbb{R}$, $D(s, t; k) = \min\{\ell(W) : W \in \mathcal{W}_{=k}(s, t)\}$

Teorema

Si $\Pi \in \mathcal{W}_{=k}(s, t)$ es de largo mínimo y vt es el último arco de W entonces $W - vt \in \mathcal{W}_{=k-1}(s, v)$ es de largo mínimo.

Un posible algoritmo para calcular $D(s, t; k)$

$ALG(s, t; k)$

Entrada: $G = (V, E)$ digrafo, $s, t \in V$, $k, \ell: E \rightarrow \mathbb{R}$

si $k = 0$, $s = t$ **entonces devolver**

si $k = 0$, $s \neq t$ **entonces devolver**

si $k \geq 1$ **entonces devolver**

Proposición

Si $k \geq 1$, $D(s, t; k) =$

Un mejor algoritmo para calcular $D(s, \cdot; k)$

Programación Dinámica

Entrada: $G = (V, E)$ digrafo, $s \in V$, k , $l: E \rightarrow \mathbb{R}$

para $v \in V$ **hacer**

$$D(s, v; 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } v = s, \\ +\infty & \text{si } v \neq s. \end{cases}$$

fin

para $j = 1 \dots k$ **hacer**

para $v \in V$ **hacer**

$$D(s, v; j) = \min_{w \in N^-(v)} \{D(s, w; j-1) + l(w, v)\}.$$

fin

fin

devolver D