Clase 08 MA3705. 02 de octubre 2020.

Tabla

- Bases, circuitos y rango en matroides.
- Span (generación) en matroides
- Paseos de largo mínimo en grafos dirigidos

Bases, circuitos y rango en matroides

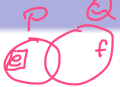
Recuerdo: Bases de una matroide

Independientes maximales.

Propiedades

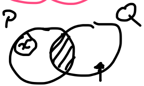
1. Existe al menos una base. ✓
2. Ninguna base contiene otra. ✓
3. **Intercambio**. Si P, Q son bases y $x \in P \setminus Q$ entonces existe $y \in Q \setminus P$, con $P - x + y$ base. ✓
4. **Intercambio negativo**. Si P, Q son bases y $x \in P \setminus Q$ entonces existe $y \in Q \setminus P$, con $Q + x - y$ base.

3



$P - e + f$ es base

4



$Q \in \mathcal{I}$

$R = (P \cap Q) + x \in \mathcal{I} \iff R \subseteq P \in \mathcal{I}$

$R \subsetneq Q + x$ Aumento

$Q \subseteq Q + x$

existe otro independiente

$R \subseteq I \subseteq Q + x$

con $|I| = |Q|$.

↳ I es base.

$I = (Q + x) - y$

$y \notin R$

$y \in Q \setminus P$.

Recuerdo: Circuitos en una matroide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$

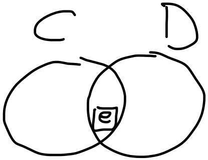
Circuitos

Los circuitos son los dependientes minimales.

Propiedades

1. $\emptyset$ no es circuito. ✓
2. Ningún circuito contiene a otro distinto. ✓
3. **Eliminación de circuitos**. Si C, D son circuitos distintos y $e \in C \cap D$ entonces existe circuito $K \subseteq C \cup D - e$.

Auxiliar.



$C \cup D - e$ no es independiente

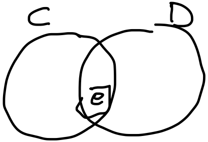
contiene circuito

Propiedad del circuito único

Teorema. Para $(S, \mathcal{I})$ matroide.

Si $X \in \mathcal{I}$, $e \in S \setminus X$, entonces existe a lo más un circuito $C \subseteq X + e$.

Dem: Si C, D son circuitos distintos en $X+e$



$e \in C \cap D$

El. de circuito $\Rightarrow$ $C \cup D - e$ es dependiente

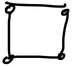
$\cap$|

X es independiente

$\Rightarrow\Leftarrow$

Rango de una matroide

Gráfica

Ej:  X $\quad r(X) = 3$

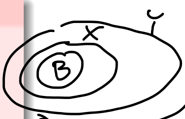
Rango

$$r(X) = \max\{|I| : I \subseteq X, I \in \mathcal{I}\}$$

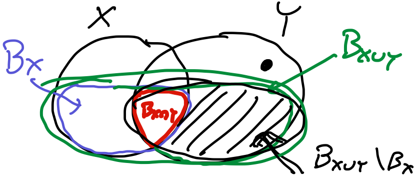
tamaño de una base

Propiedades

1. $0 \le r(X) \le |X|$ ✓ $\quad$ "$|B|$"
2. $X \subseteq Y \implies r(X) \le r(Y)$ ✓
3. $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \le r(X) + r(Y)$ $\quad (*)$
4. $r(X+e) - r(X) \in \{0,1\}$ $\quad (\forall e \in S)$



Submodularidad del rango.



Sea $B_{X\cap Y}$ base de $X \cap Y$

Extendámoslo a una base B_X de X

Nuevamente extendamos a una base $B_{X\cup Y}$ de $X \cup Y$

$B_{X\cap Y} \subseteq B_X \subseteq B_{X\cup Y}$

$$r(X\cup Y) + r(X\cap Y) = |B_{X\cup Y}| + |B_{X\cap Y}|$$

$$= |B_X| + |B_{X\cup Y} \setminus B_X| + |B_{X\cap Y}|$$

$$= r(X) + |\underbrace{B_{X\cap Y} \,\dot\cup\, B_{X\cup Y} \setminus B_X}_{\in \mathcal{I}, \ \subseteq Y}| \le r(X) + r(Y)$$

$X, \{e\}$

$$\underbrace{r(X+e)}_{\text{unión}} + \underbrace{r(\emptyset)}_{\text{intersección}} \le r(X) + r(\{e\})$$

$r(\emptyset) = 0$, $\quad r(\{e\}) \le 1$.

Span

Span en una matroide

$r(X+e)-r(X) \in \{0,1\}$

span

$\mathrm{span}(X) = \{e \in S : \underbrace{r(X+e) = r(X)}\}$ ✓

definición

Propiedades

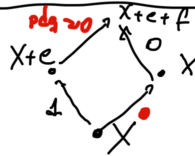
1. $X \subseteq \mathrm{span}(X)$ ✓
2. $X \subseteq Y \implies \mathrm{span}(X) \subseteq \mathrm{span}(Y)$ ✓
3. $r(\mathrm{span}(X)) = r(X)$ Propuesto
4. $f \in \mathrm{span}(X) \iff \mathrm{span}(X+f) = \mathrm{span}(X)$
5. Si $\underline{e \notin \mathrm{span}(X)}$, $\underline{e \in \mathrm{span}(X+f)}$ $\implies f \in \mathrm{span}(X+e)$.

$e, f \notin X$

$e \in \mathrm{span}(X)$

r: submod

$r(Y+e)-r(Y) \leq \underbrace{r(X+e)-r(X)}_{=0}$



$r(X+e+f)-r(X+f)$ $= 0$

rango $r(X+e)-r(X) = 1 \iff e \notin \mathrm{span}(X)$

$r(X+e+f)-r(X) = [\underbrace{r(X+e+f)-r(X+e)}] + [\overbrace{r(X+e)-r(X)}^{1}] = 2$

$= [\underbrace{r(X+e+f)-r(X+f)}_{0}] + [\underbrace{r(X+f)-r(X)}_{?}]$

Si $f \notin \mathrm{span}(X+e)$, $\Delta = 1$

$\Rightarrow r(X+e+f)-r(X) = 2$

pero $r(X+e+f)-r(X) = r(X+f)-r(X) \leq 1$

Span en una matroide

span

$\mathrm{span}(X) = \{e \in S \colon r(X+e) = r(X)\}$

Propiedades

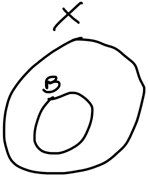
1. $X \subseteq \mathrm{span}(X)$
2. $X \subseteq Y \implies \mathrm{span}(X) \subseteq \mathrm{span}(Y)$
3. $r(\mathrm{span}(X)) = r(X)$
4. $f \in \mathrm{span}(X) \iff \mathrm{span}(X+f) = \mathrm{span}(X)$
5. Si $e \notin \mathrm{span}(X)$,
   $e \in \mathrm{span}(X+f) \implies f \in \mathrm{span}(X+e)$.

Bases son independientes y generan:

Sea B base de X, entonces $X \subseteq \text{span}(B) = \text{span}(X)$.

¿Por qué?

$$r(\text{span}(B)) = r(B) = |B| = r(X) = r(\text{span } X).$$



Si $e \in X \setminus \text{span } B$

$$r(B+e) \boxed{=} r(B) + 1 = |B| + 1$$

↳ $B+e$ es independiente.

$\rightarrow\leftarrow$

$\therefore$ $e \in \text{span } B$.

Span de independientes

Sea $I \in \mathcal{I}$, $e \notin \overset{I}{\cancel{\mathcal{I}}}$. Se tiene $I + e \in \mathcal{I} \iff e \notin \operatorname{span}(I)$.

Más span (propuesto):

Otras formas equivalentes:

$e \in \mathrm{span}(X) \iff$

1. $r(X+e) = r(X)$
2. $\exists C$ circuito con $e \in C \subseteq X + e$
3. $\forall B$ base de X, $e \in \mathrm{span}(B)$

De hecho, $\mathrm{span}(X)$ es el único conjunto Y maximal tal que $Y \supseteq X$ y $r(Y) = r(X)$.

Sea ALG la base de $(S, \mathcal{I})$ obtenida al aplicar el algoritmo glotón en el orden $s_1, \ldots, s_n$.

Teorema

$$s_i \in \mathrm{ALG} \iff s_i \notin \mathrm{span}(S_{i-1}).$$