# Clase 08 MA3705. 02 de octubre 2020.

**Tabla**

- Bases, circuitos y rango en matroides.
- Span (generación) en matroides
- Paseos de largo mínimo en grafos dirigidos

# Bases, circuitos y rango en matroides

# Bases en una matroide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$

### Recuerdo: Bases de una matroide

Independientes maximales.

### Propiedades

1. Existe al menos una base.
2. Ninguna base contiene otra.
3. **Intercambio**. Si $P, Q$ son bases y $x \in P \setminus Q$ entonces existe $y \in Q \setminus P$, con $P - x + y$ base.
4. **Intercambio negativo**. Si $P, Q$ son bases y $x \in P \setminus Q$ entonces existe $y \in Q \setminus P$, con $Q + x - y$ base.

# Recuerdo: Circuitos en una matroide $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$

## Circuitos

Los circuitos son los dependientes minimales.

## Propiedades

1. $\emptyset$ no es circuito.
2. Ningún circuito contiene a otro distinto.
3. **Eliminación de circuitos**. Si $C, D$ son circuitos distintos y $e \in C \cap D$ entonces existe circuito $K \subseteq C \cup D - e$.

# Propiedad del circuito único

**Teorema.** Para $(S, \mathcal{I})$ matroide.

Si $X \in \mathcal{I}$, $e \in S \setminus X$, entonces existe a lo más un circuito $C \subseteq X + e$.

# Rango de una matroide

**Rango**

$r(X) = \text{máx}\{|I|\colon I \subseteq X, I \in \mathcal{I}\}$

**Propiedades**

1. $0 \leq r(X) \leq |X|$
2. $X \subseteq Y \implies r(X) \leq r(Y)$
3. $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$
4. $r(X + e) - r(X) \in \{0, 1\}$

# Span

# Span en una matroide

**span**

$\mathrm{span}(X) = \{e \in S \colon r(X+e) = r(X)\}$

**Propiedades**

1. $X \subseteq \mathrm{span}(X)$
2. $X \subseteq Y \implies \mathrm{span}(X) \subseteq \mathrm{span}(Y)$
3. $r(\mathrm{span}(X)) = r(X)$
4. $f \in \mathrm{span}(X) \iff \mathrm{span}(X+f) = \mathrm{span}(X)$
5. Si $e \notin \mathrm{span}(X)$,
   $e \in \mathrm{span}(X+f) \implies f \in \mathrm{span}(X+e)$.

# Span en una matroide

**span**

$\mathrm{span}(X) = \{e \in S\colon r(X+e) = r(X)\}$

**Propiedades**

1. $X \subseteq \mathrm{span}(X)$
2. $X \subseteq Y \implies \mathrm{span}(X) \subseteq \mathrm{span}(Y)$
3. $r(\mathrm{span}(X)) = r(X)$
4. $f \in \mathrm{span}(X) \iff \mathrm{span}(X+f) = \mathrm{span}(X)$
5. Si $e \notin \mathrm{span}(X)$,
   $e \in \mathrm{span}(X+f) \implies f \in \mathrm{span}(X+e)$.

# Bases son independientes y generan:

Sea $B$ base de $X$, entonces $X \subseteq \operatorname{span}(B) = \operatorname{span}(X)$.

# Span de independientes

Sea $I \in \mathcal{I}$, $e \notin \mathcal{I}$. Se tiene $I + e \in \mathcal{I} \iff e \notin \operatorname{span}(I)$.

# Más span (propuesto):

**Otras formas equivalentes:**

$e \in \mathrm{span}(X) \iff$

1. $r(X+e) = r(X)$
2. $\exists C$ circuito con $e \in C \subseteq X + e$
3. $\forall B$ base de $X$, $e \in \mathrm{span}(B)$

De hecho, $\mathrm{span}(X)$ es el único conjunto $Y$ maximal tal que $Y \supseteq X$ y $r(Y) = r(X)$.

# Algoritmo glotón y span

Sea $\mathrm{ALG}$ la base de $(S, \mathcal{I})$ obtenida al aplicar el algoritmo glotón en el orden $s_1, \ldots, s_n$.

**Teorema**

$$s_i \in \mathrm{ALG} \iff s_i \notin \mathrm{span}(S_{i-1}).$$

# Paseos de largo mínimo en grafos dirigidos

# Grafos dirigidos (simples)

- Nodos y Arcos
- Cabeza y Cola
- Paralelo, Antiparalelo, Loop
- Digrafo simple.
- Paseos, senderos, caminos, ciclos dirigidos.

# Paseos dirigidos de largo mínimo

Sea $\ell \colon E \to \mathbb{R}$ función de largo. Extendemos esa función a los paseos $W = v_1 v_2 \ldots v_k$ como:

Algunas preguntas naturales. Dado $G$, $\ell$, $u$ y $v$

1. Determinar si existe paseo dirigido de $u$ a $v$.
2. Encontrar paseo dirigido de $u$ a $v$ de menor número de arcos.
3. Encontrar paseo dirigido de $u$ a $v$ con exactamente $k$ arcos, de largo mínimo.
4. Encontrar paseo dirigido de $u$ a $v$ de largo mínimo.