Clase 06 MA3705. 25 de septiembre 2020.

Tabla

- Matroides (definición).
- Base/Independiente de tamaño/peso máximo
- Algoritmo de Kruskal
- Caracterización de matroides.

Matroides (definición)

Sistemas de independencia y bases

$(S, \mathcal{I})$ es sistema de independencia.

S: Conjunto finito de referencia.
$\mathcal{I} \subseteq 2^S$: Los conjuntos $J \in \mathcal{I}$ se llaman independientes.

$(S, \mathcal{I})$ satisface:

- (vacío es independiente): $\emptyset \in \mathcal{I}$.
- (cerrado para inclusión): $(\forall X \subseteq Y \subseteq S) \quad Y \in \mathcal{I} \implies X \in \mathcal{I}$.

Bases de conjuntos

Sea $(S, \mathcal{I})$ un sistema de independencia.
Sea $X \subseteq S$ un subconjunto de S.
B es base de X si:

- (independiente): $B \in \mathcal{I}$
- (maximal): $\forall x \in X \setminus B, B + x \notin \mathcal{I}$.

Ejemplos importantes

Matroide gráfica de un multigrafo $G = (V, E)$

$\mathcal{I} := \mathcal{I}(G) = \{F \subseteq E \colon F \text{ es acícliclo}\}$
$(E, \mathcal{I})$: Matroide gráfica de G.

Ejemplos importantes (2)

Matchings de un (multi)grafo $G = (V, E)$

$(E, \{\text{matchings}\})$: Sistema de matchings de G.

Ejemplos importantes (3)

Sistemas de vectores

$v_1, \ldots, v_m$ de vectores en un espacio vectorial.
$I \subseteq [m]$ es independiente si $(v_i)_{i \in I}$ es linealmente independiente en el espacio vectorial.
$([m], \text{independientes})$: Matroide lineal.

¿Cómo encontrar una base de un conjunto?

Obs: Todo conjunto independiente $I \subseteq X$ se puede extender a una base de X.

Cuantificar eficiencia: Oráculo de independencia

Propiedad útil:

Sea $\pi\colon s_1, \ldots, s_m$ es un ordenamiento de S en un sistema de independencia $(S, \mathcal{I})$.

Los prefijos de π son los conjuntos $S_i = \{s_1, \ldots, s_i\}$, para $i \in [m] + 0$.

Si J es la salida del algoritmo glotón en π entonces para todo prefijo, $J \cap S_i$ es base de J.

Base/Independiente de tamaño/peso máximo

Problemas importantes

Sea $(S, \mathcal{I})$ un sistema de independencia y $w\colon S \to \mathbb{R}$ una función de peso.

1. Encontrar una base de S de tamaño máximo.
2. Encontrar una base de S de peso $w(S)$ máximo.
3. Encontrar un conjunto independiente $J \in \mathcal{I}$ de peso $w(J)$ máximo.

En general estos problemas son difíciles (no existen algoritmos polinomiales). Hay un caso donde podremos resolverlo.

Equicardinalidad de las bases

Matroides: Sistemas de independencia con equicardinalidad de bases

Un sistema de independencia $(S, \mathcal{I})$ satisface **equicardinalidad de bases** si para todo $X \subseteq S$ las bases de X tienen el mismo cardinal.

Cuando un sistema satisface esta propiedad llamamos rango $r(X)$ de un conjunto X al único tamaño posible de las bases de X

Base de tamaño máximo en matroides.

Sea $(S, \mathcal{I})$ una matroide.
¿Cómo encontramos una base de S de tamaño máximo?

Base de peso máximo en matroides.

Sea $(S, \mathcal{I})$ una matroide y $w\colon S \to \mathbb{R}$
¿Cómo encontramos una base de S de peso máximo?

Un lema útil

Sea $X \subseteq S = \{s_1, \ldots, s_n\}\}$. $w \colon S \to \mathbb{R}$.
$w(s_1) \geq w(s_2) \geq \ldots w(s_n)$.
Sea s_{n+1} un elemento artificial con $w(s_{n+1}) = w(s_n)$.

$$w(X) = w(s_{n+1})|X| + \sum_{i=1}^{n} |X \cap S_i|(w(s_i) - w(s_{i+1}))$$

Consecuencia: Base de peso máximo en matroide

Algoritmo glotón en orden decreciente de pesos

Sea $(S, \mathcal{I})$ una matroide. La salida ALG de este algoritmo es una base de peso máximo de $(S, \mathcal{I})$

Demostración:

Variante: Independiente de peso máximo en matroides

Restricción de matroides

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ una matroide. Sea $T \subseteq S$, se define la restricción $\mathcal{M}|_T = (T, \{X \in \mathcal{I} \colon X \subseteq T\})$.

Propiedad: $\mathcal{M}|_T$ es matroide.

Variante: Independiente de peso máximo en matroides

Restricción de matroides

Sea $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ una matroide. Sea $T \subseteq S$, se define la restricción $\mathcal{M}|_T = (T, \{X \in \mathcal{I} \colon X \subseteq T\})$.

Propiedad: $\mathcal{M}|_T$ es matroide.

Algoritmo glotón en orden decreciente de pesos

Sea $S_+ = \{x \in S \colon w(x) \geq 0\}$. Todas las bases de peso máximo de $\mathcal{M}|_{S_+}$ son conjuntos independientes de peso máximo de $\mathcal{M}$.

¿Bases de peso mínimo en matroides?

Algoritmo de Kruskal

Consecuencia: Algoritmo de Kruskal para MST

Algoritmo de Kruskal

Entrada: $G = (V, E)$ conexo
Ordenar E como $e_1, \dots, e_m$ con
$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$
$F \leftarrow \emptyset$ **para** i *de 1 a* m **hacer**
  si $F + e_i$ *acíclico* **entonces**
    $F \leftarrow F + e_i$
  fin
fin
devolver $T = (V, F)$

Implementación simple de Kruskal para MST

Algoritmo de Kruskal (implementación)

Entrada: $G = (V, E)$ conexo
Ordenar E como $e_1, \ldots, e_m$ con
$w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_m)$
Crear partición de V con n singletons.
$F \leftarrow \emptyset$ **para** i *de 1 a* m **hacer**
    Sea $e_i = u_i v_i$.
    si *Conjunto*$(u_i) \neq$ *Conjunto*(v_i) **entonces**
        $F \leftarrow F + e_i$
        Union(Conjunto(u_i), Conjunto(v_i))
    fin
fin
devolver $T = (V, F)$

Existen estructuras de datos para mantener particiones de n elementos:

- Determinar el conjunto que contiene a un elemento en tiempo $O(\log n)$
- Unir dos conjuntos (Union) en $O(\log n)$.

Notas

Caracterización de matroides

¿Cómo demostrar que un sistema es matroide?

Un sistema de independencia $(S, \mathcal{I})$ es matroide si y solo si (cualquiera de las siguientes se tiene).

1. **Equicardinal de Bases:** Para todo $X \subseteq S$ todas las bases de X tienen el mismo cardinal.
2. **Glotón:** Para todo peso $w \colon S \to \mathbb{R}$, el algoritmo glotón (ordenado en orden decreciente) devuelve base de peso máximo en S.
3. **Aumento:**
$$(\forall X, Y \in \mathcal{I}, |X| < |Y|) \quad \exists z \in Y \setminus X, X + z \in \mathcal{I}.$$
4. **Aumento débil:**
$$(\forall X, Y \in \mathcal{I}, |X \setminus Y| = 1, |Y \setminus X| = 2) \quad \exists z \in Y \setminus X, X + z \in \mathcal{I}.$$

Equivalencias

Equivalencias

Equivalencias