Clase 02 MA3705. 04 de septiembre 2020.

Tabla

- Subgrafos, conectividad y componentes conexas.
- Árboles y cortes
- Problemas de conectividad. Generación por aristas.
- Algoritmos de búsqueda

Subgrafos, conectividad y componentes conexas.

Convenciones de notación.

Cada vez que digamos G grafo, queremos decir G es grafo simple.

Notación útil

- Si A es conjunto y $v \notin A$. $\quad A + v := A \cup \{v\}$.
- Si A es conjunto y $v \in A$. $\quad A - v := A \setminus \{v\}$.
- Si A es conjunto, $\binom{A}{k}$ es la colección de conjuntos de tamaño k en A.
- Si G es grafo, entonces $E(G) \subseteq \binom{V}{2}$.
- $[n] = \{1, 2, \ldots, n\} = [1, n] \cap \mathbb{Z}$.

Más ejemplos de grafos

Subgrafos

$H = (V', E')$ es subgrafo de $G = (V, E)$ si (1) H es grafo, (2) $V' \subseteq V$, (3) $E' \subseteq E$.

1. Un subgrafo H de G es *cobertor* si $V(H) = V(G)$.
2. El grafo inducido por $W \subseteq V$, es $G[W] = (W, E[W])$.
3. Grafo obtenido al borrar una arista. $G - e =$
4. Grafo obtenido al borrar un vértice. $G - v =$

Conceptos básicos de conectividad en grafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se definen:

1. Paseo (Walk).
2. Sendero (Trail).
3. Camino (Path).
4. Paseo abierto/cerrado.
5. Ciclo.

Lemas de conectividad para un grafo G

Lema

Si existe paseo de u a v entonces existe camino de u a v.

Se define la relación *ser alcanzable en G* como:

$u \sim_G v$:

Lema

$\sim_G$ es una relación de equivalencia en $V(G)$

Sus clases de equivalencia $=$ componentes conexas de G.
Si G tiene una sola componente conexa: G es conexo.

Componentes conexas de un grafo

Llamemos $cc(G)$ al número de componentes conexas de $G = (V, E)$.

Lema

Si G es acíclico entonces $cc(G) = |V| - |E|$

Árboles y cortes

Árboles, Bosques, Hojas

Un árbol es ...

Un bosque es ...

Una hoja es ...

Algunas propiedades:

- Todo grafo conexo contiene ...
- Todo grafo contiene ...
- Todo bosque con al menos una arista ...

Otras propiedades de árboles:

Un grafo G es árbol si y solo si

1. G es conexo y acíclico
2. Para todo u, v existe exactamente un camino de u a v en G.
3. G es conexo y tiene a lo más aristas.
4. G es conexo y para todo $e \in E(G)$, $G - e$ ...
5. G es acíclico y tiene al menos aristas.
6. G es acíclico y para todo $e \notin E(G)$, $G + e$ ...

¿Como determinar si un grafo es conexo?

$G = (V, E)$ es conexo si y solo si:

Teorema: Caracterización por cortes de conexidad

Teorema

$G = (V, E)$ es conexo si y solo si para todo $U : \emptyset \subsetneq U \subsetneq V$, $\delta_E(U) \neq \emptyset$.

Corolario

Sea $U \subseteq V(G)$, $U \neq \emptyset$.

Corolario

U es componente conexa de G si y solo si $G[U]$ es conexo y $\delta(U) = \emptyset$

Problemas de conectividad. Generación por aristas.

Problema importante 1:

Dado un grafo G y una función de costo $c\colon E \to \mathbb{R}$.

Problema del árbol cobertor/generador de costo mínimo. MST

Encontrar $F \subseteq E$ de costo $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$ mínimo tal que (V, F) es árbol

Generación (span) de aristas

- Decimos que un conjunto de aristas F genera una arista $e = uv$ (esté o no en F) si en F existe un u-v camino. Escribimos $e \in \text{span}(F)$
- Decimos que un grafo H genera a otro grafo H' si $E(H)$ genera todas las aristas de H'.
  $E(H') \subseteq \text{span}(E(H))$

Si H genera a H'
¿Qué podemos decir de las componentes conexas de H respecto a las de H'?

Lemas respecto a generación

Lema

Si $e = uv \in E(G)$ pertenece a algún ciclo de G entonces $G - e$ genera G

Problema importante 2:

Dado un grafo G y una función de costo $c\colon E \to \mathbb{R}$.

Problema del subgrafo generador de costo mínimo

Encontrar $F \subseteq E$ de costo $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$ mínimo tal que (V, F) es subgrafo generador.

Antes. ¿Cómo encontrar algún árbol generador?

Posibles estrategias:

1. Búsqueda de vértices.
2. Agregar aristas evitando ciclos.
3. Eliminar ciclos.
4. Eliminar aristas y mantener conexidad.

Algoritmos de búsqueda

Algoritmo genérico de búsqueda / crecer un árbol desde un vértice:

Buscar árbol que cubra la CC de un vértice r dado:

Búsqueda genérico:

Entrada: $G = (V, E)$, $r \in V$
$U \leftarrow \{r\}$; `// Nodos visitados`
$F \leftarrow \emptyset$; `// Aristas de solución`
mientras $\delta(U) \neq \emptyset$ **hacer**
  Elegir $e = uv \in \delta(U)$, $u \in U$, $v \notin U$
  $U \leftarrow U + v$
  $F \leftarrow F + e$
fin
devolver (U, F)

Búsqueda genérico:

Entrada: $G = (V, E)$, $r \in V$
$U \leftarrow \{r\}$, ; `// Nodos visitados`
$F \leftarrow \emptyset$; `// Aristas de solución`
mientras $\delta(U) \neq \emptyset$ **hacer**
  Elegir $e = uv \in \delta(U)$, $u \in U$, $v \notin U$
  $U \leftarrow U + v$
  $F \leftarrow F + e$
fin
devolver (U, F)

Casos especiales: Búsqueda en amplitud y búsqueda en profundidad:

Búsqueda en aplitud (BFS):

Entrada: $G = (V, E)$, $r \in V$
$U \leftarrow \{r\}$, $F \leftarrow \emptyset$
$\textsc{Cola} \leftarrow \emptyset$.
Insertar aristas de $\delta(r)$ en $\textsc{Cola}$.
mientras $\textsc{Cola} \neq \emptyset$. **hacer**
  Extraer primer e de $\textsc{Cola}$.
  si $e \in \delta(U)$, $u \in U$, $v \notin U$
   entonces
    $U \leftarrow U + v$
    $F \leftarrow F + e$
    Insertar aristas de $\delta(v)$ en $\textsc{Cola}$
  fin
fin
devolver (U, F)

Búsqueda en profundidad (DFS):

Entrada: $G = (V, E)$, $r \in V$
$U \leftarrow \{r\}$, $F \leftarrow \emptyset$
$\textsc{Pila} \leftarrow \emptyset$.
Insertar aristas de $\delta(r)$ en $\textsc{Pila}$.
mientras $\textsc{Pila} \neq \emptyset$. **hacer**
  Extraer última e de $\textsc{Pila}$.
  si $e \in \delta(U)$, $u \in U$, $v \notin U$
   entonces
    $U \leftarrow U + v$
    $F \leftarrow F + e$
    Insertar aristas de $\delta(v)$ en $\textsc{Pila}$
  fin
fin
devolver (U, F)

Ejemplo

Ejemplo